ТЕОРІЯ
ЦѢЛЫХЪ
КОМПЛЕКСНЫХЪ ЧИСЕЛЪ
СЪ ПРИЛОЖЕНІЕМЪ
КЪ
ИНТЕГРАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНІЮ

СОЧИНЕНІЕ б

Е. Золотарева.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія А. Якобсона (Вас. Остр., 9 лин. домъ № 8).
1874.

По опредѣленію физико-математическаго факультета С.-Петербургскаго Университета печатать дозволяется. С.-Петербургъ, 23 Ноября 1873 года.

Деканъ *А. Бекетовъ.*

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Въ этомъ сочиненіи разсматриваются комплексныя числа, зависящія отъ корней какого нибудь неприводимаго уравненія съ цѣлыми коеффиціентами, изъ которыхъ первый равенъ единицѣ. Цѣлыми комплексными числами здѣсь называются цѣлыя функціи съ цѣлыми коеффиціентами, зависящія отъ одного изъ корней такого уравненія. Относительно такихъ чиселъ сами собой представляются различные вопросы о дѣлимости, о разложеніи на множители и т. д. Рѣшенія этихъ вопросовъ интересны въ особенности по тѣмъ разнообразнымъ приложеніямъ, которыя они встрѣчаютъ въ теоріи чиселъ, высшей алгебрѣ и интегральномъ исчисленіи. Можно сказать, что теорія комплексныхъ чиселъ есть одна изъ тѣхъ, которыя соединяютъ названныя, по видимому столь различныя, части математическаго анализа, что, конечно, составляетъ одну изъ привлекательныхъ сторонъ этого предмета. Вотъ почему, какъ намъ кажется, мы встрѣчаемся здѣсь съ именами такихъ великихъ геометровъ, какъ Гауссъ, Дирихле, Куммеръ, Эрмитъ, Кронеккеръ и Ейзенштейнъ.

Исходною точкою при составленіи теоріи комплексныхъ чиселъ мнѣ послужили свойства функціональныхъ сравненій, или, точнѣе, свойства полиномовъ съ цѣлыми коеффиціентами относительно нѣкотораго простаго модуля. Уже въ 1797 или 1798 году Гауссу были извѣстны главнѣйшія свойства этихъ сравненій. По извлеченію изъ оставленной имъ рукописи, которое находится во II-мъ томѣ его сочиненій, видно, что изложеніе свойствъ функціональныхъ сравненій должно было составить VIII главу его «Disquisitiones arithmeticae». Впослѣдствіи эти свойства были вновь найдены Серре, который подробно развилъ ихъ въ своемъ курсѣ высшей алгебры и приложилъ къ теоріи уравненій.

Но самое естественное и замѣчательное приложеніе свойствъ функціональныхъ сравненій встрѣчается въ теоріи комплексныхъ чиселъ. Это и вполнѣ понятно, такъ какъ относительно комплексныхъ чиселъ приходится рѣшать задачи, имѣющія много общаго съ тѣми, которыя рѣшаются въ теоріи функціональныхъ сравненій.

Для того, чтобы нагляднѣе выставить эту связь, а также для того, чтобы показать теоремы въ томъ самомъ видѣ, въ какомъ онѣ мнѣ нужны для приложеній, я счелъ полезнымъ посвятить первую главу своего сочиненія изложенію свойствъ функціональныхъ сравненій.

Комплексныя числа имѣютъ ту особенность сравнительно съ обыкновенными цѣлыми числами, что существуетъ вообще безчисленное множество комплексныхъ чиселъ дѣлящихъ единицу. Эти числа называются комплексными единицами и играютъ существенную роль въ теоріи комплексныхъ чиселъ. Свойства ихъ главнымъ образомъ были изучены Дирихле.

Во II-й главѣ своего сочиненія я излагаю какъ результаты, найденные Дирихле, такъ и нѣкоторые другіе, принадлежащіе Куммеру и Кронеккеру. Я основываю свои доказательства на теоремѣ Эрмита относительно предѣла minimum'а опредѣленной квадратичной формы въ функціи опредѣлителя. Эта прекрасная теорема, замѣняющая въ общемъ случаѣ непрерывныя дроби, имѣетъ въ высшей степени важное значеніе въ теоріи чиселъ.

III-я глава посвящена изложенію свойствъ идеальныхъ множителей комплексныхъ чиселъ. Въ ней я обобщаю извѣстную теорію Куммера для комплексныхъ чиселъ, зависящихъ отъ корней изъ единицы. Желая представить теорію идеальныхъ множителей въ самомъ простомъ видѣ, я отложилъ до другаго раза публикацію моихъ изслѣдованій относительно тѣхъ уравненій, для которыхъ приведенное выше понятіе о цѣломъ комплексномъ числѣ является недостаточнымъ. Такъ что, если разсматривать только уравненія, для которыхъ можно ограничиться предыдущимъ опредѣленіемъ цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ, то изложенную здѣсь теорію нужно считать законченною.

При этомъ я считаю необходимымъ упомянуть о двухъ работахъ, которыя имѣютъ нѣкоторыя пункты соприкосновенія съ моею. Первая изъ нихъ принадлежитъ Зеллингу (Zeitschrift für Mathematik und Phisik herausgegeben von O. Schlömilch 1865). Это первая попытка обобщить идеальныя числа Куммера, но такъ какъ она основана на нѣкоторыхъ опредѣленіяхъ, при помощи которыхъ трудности обходятся, но не устраняются и на нѣкоторыхъ допущеніяхъ, которыя не оправданы никакими приложеніями, то ее нельзя считать удовлетворительною. Другая работа, во многихъ отношеніяхъ весьма замѣчательная, принадлежитъ Дедекинду. (Vorlesungen über Zahlentheorie. Lejeune Dirichlet. 2-е изданіе, статья «Composition der Formen»). Она не представляетъ собственно теоріи цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ. Цѣль Дедекинда разсмотрѣть идеальные множители съ болѣе высокой точки зрѣнія. Однакоже, что касается собственно комплексныхъ чиселъ, мы должны сказать относительно этой работы тоже, что и о работѣ Зеллинга.

Въ IV-й главѣ я прилагаю теорію комплексныхъ чиселъ къ одному вопросу интегральнаго исчисленія. Этотъ вопросъ состоитъ въ томъ, чтобы узнать при помощи конечнаго числа дѣйствій интегрируется ли дифференціалъ одного опредѣленнаго вида въ логариѳмахъ и поэтому относится къ той части интегральнаго исчисленія, которая обогащена изслѣдованіями Абеля, Ліувилля, Чебышева, Вейерштрасса и друг. Я особенно цѣню это приложеніе теоріи комплексныхъ чиселъ, потому что оно выражаетъ новую связь между интегральнымъ исчисленіемъ и теоріею чиселъ.

Е. З.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Глава I.

О функціональныхъ сравненіяхъ.

Глава II.

О комплексныхъ единицахъ.

Глава III.

Идеальные множители комплексныхъ чиселъ.

Глава IV.

Приложеніе теоріи комплексныхъ чиселъ къ одному вопросу интегральнаго ис-

ГЛАВА I.

О функціональныхъ сравненіяхъ[1].

1.

Пусть A и B будутъ двѣ функціи перемѣнной x вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$$
$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n,$$

гдѣ коэффиціенты

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots\ a_m$$
$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \dots\ b_n$$

суть цѣлыя числа.

Для краткости мы будемъ называть такія функціи просто функціями. Впрочемъ, если намъ придется разсматривать не цѣлыя функціи или цѣлыя функціи но не съ цѣлыми коэффиціентами, то мы каждый разъ будемъ дѣлать оговорку.

Функціи называются *сравнимыми по нѣкоторому модулю* p, если коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x сравнимы по модулю p; такъ что

$$(1) \qquad A \equiv B \ (\text{мод. } p);$$

если

$$\left.\begin{array}{l} a_0 \equiv b_0 \\ a_1 \equiv b_1 \\ a_2 \equiv b_2 \\ \dots\dots \end{array}\right\} (\text{мод. } p)$$

Если

$$A \equiv 0 \ (\text{мод. } p),$$

то всѣ коэффиціенты A дѣлятся на p.

Извѣстно[2], что если въ двухъ сравнимыхъ функціяхъ перемѣнной x дать одно и тоже значеніе или значенія различныя но сравнимыя, то и результаты выйдутъ сравнимые по тому же модулю.

Надъ сравненіями вида (1) можно дѣлать такія же дѣйствія какъ и надъ обыкновенными сравненіями.

Такъ, если

$$A \equiv B,\quad C \equiv D,\quad E \equiv F \text{ (мод. } p),$$

то имѣютъ мѣсто также и сравненія

$$\left.\begin{array}{c} A + C + E \equiv B + D + F \\ A - C \equiv B - D \\ ACE \equiv BDF \\ \text{и т п.,} \end{array}\right\} \text{(мод. } p)$$

доказательство которыхъ не представляетъ никакихъ затрудненій.

2.

Далѣе мы будемъ предполагать модуль p числомъ простымъ. Пусть A и B будутъ двѣ данныя функціи. Если можно подыскать другія двѣ функціи C и D такъ, чтобы имѣло мѣсто тождество

$$BC = A + pD$$

или, что тоже самое, сравненіе

$$BC \equiv A \text{ (мод. } p),$$

то говорятъ, что *функція A дѣлится по модулю p на функцію B*, а C есть частное отъ этого дѣленія; другими словами: *функція A равна по модулю p произведенію двухъ функцій B и C.*

Предполагая, что B не дѣлится на p, мы докажемъ, что частное C имѣетъ одно опредѣленное значеніе, при этомъ конечно, всѣ функціи сравнимыя съ C по модулю p считаются за одну. Дѣйствительно, допустимъ, что кромѣ функціи C будетъ существовать еще другая C', удовлетворяющая сравненію

$$BC' \equiv A \text{ (мод. } p)$$

и не сравнимая съ C по модулю p. Въ такомъ случаѣ мы получимъ

(1) $$B(C' - C) \equiv 0 \text{ (мод. } p).$$

Такъ какъ, по предположенію, ни одна изъ функцій B и $C' - C$ не дѣлится на p, то отбросивъ въ этихъ функціяхъ члены дѣлящіеся на p и разложивъ остатки по нисходящимъ степенямъ x будемъ имѣть

$$\left.\begin{array}{r} C' - C \equiv cx^g + \ldots. \\ B \equiv bx^f + \ldots. \end{array}\right\} \text{(мод. } p),$$

гдѣ коеффиціенты b и c не дѣлятся на p; точками обозначены члены степеней соотвѣтственно меньшихъ f и g.

Положивши это, получимъ

$$B(C' - C) \equiv bcx^{f+g} + \ldots. \text{ (мод. } p);$$

слѣдовательно произведеніе $B(C' - C)$ не дѣлится на p, а это противорѣчитъ сравненію (1).

Чтобы на самомъ дѣлѣ раздѣлить A на B можно поступать слѣдующимъ образомъ:

Прежде всего можно отбросить въ этихъ функціяхъ члены, коэффиціенты которыхъ дѣлятся на p и замѣнить остальные коэффиціенты другими числами сравнимыми съ ними по модулю p, если найдемъ это удобнымъ. Послѣ этихъ преобразованій функціи A и B замѣнятся функціями A' и B', такъ что

$$A \equiv A', \quad B \equiv B' \text{ (мод. } p).$$

Пусть b будетъ коэффиціентъ высшаго члена B', который, по предположенію, уже не будетъ дѣлится на p. По числу b мы найдемъ β удовлетворяющее сравненію

$$\beta b \equiv 1 \text{ (мод. } p)$$

и составимъ функцію

(2) $$B'' \equiv \beta B' \text{ (мод. } p),$$

коэффиціентъ высшаго члена которой можно принять равнымъ единицѣ.

Затѣмъ мы дѣлимъ A' на B'' алгебраически, отбрасывая въ каждомъ полученномъ остаткѣ члены съ коэффиціентами дѣлящимися на p и замѣняя коэффиціенты другихъ членовъ ихъ вычетами по модулю p, если найдемъ это удобнымъ. Поступая такимъ образомъ мы непремѣнно придемъ къ остатку степени ниже степени B''. Для того чтобы A' или, что все равно, A дѣлилось по модулю p на B'' необходимо и достаточно, чтобы этотъ остатокъ дѣлился на p. Обозначивъ черезъ C' частное отъ дѣленія A' на B'', получимъ

$$A \equiv A' \equiv B''C' \equiv bB''\,.\,\beta C' \text{ (мод. } p).$$

Но изъ (2) выводимъ

$$bB'' \equiv B' \equiv B \text{ (мод. } p).$$

Положивъ поэтому

$$\beta C' \equiv C \text{ мод. } p),$$

будемъ имѣть

$$A \equiv BC \text{ (мод. } p).$$

Примѣчаніе. Если функціи A и B дѣлятся на функцію C по модулю p, то, очевидно, и $A \pm B$ дѣлится на C. Точно также, если функція A дѣлится на функцію C по модулю p и B есть какая нибудь другая функція, то и произведеніе AB дѣлится на C по модулю p.

3.

Рѣшимъ теперь такую задачу:

Даны двѣ функціи A и B, найти ихъ общій наибольшій дѣлитель по модулю p т. е. дѣлитель наивысшей степени. Пусть A будетъ степени не ниже чѣмъ B; дѣлимъ A на B по модулю p. Если дѣленіе совершится безъ остатка, то B и будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ Въ противномъ случаѣ мы получимъ остатокъ C степени ниже чѣмъ B. Дѣлимъ теперь B на C и т д.

Такъ что получимъ рядъ сравненій

$$A \equiv aB + C, \quad B \equiv bC + D, \quad C \equiv cD + E \text{ и т, д. (мод. } p).$$

Функціи A, B, C, D, E . . . . будутъ степеней все убывающихъ.

Если мы дойдемъ до такой функціи, что дѣленіе на нее совершится безъ остатка, то эта функція и будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ A и B. Напримѣръ, если D будетъ дѣлиться на E, то E и будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ. Дѣйствительно, изъ предыдущихъ равенствъ видно, что тогда C, B и A будутъ дѣлиться на E по модулю p; слѣдовательно E будетъ общимъ дѣлителемъ A и B. Во вторыхъ изъ тѣхъ же равенствъ видно, что общій наибольшій дѣлитель A и B долженъ дѣлить по модулю p всѣ функціи

$$C,\ D,\ E$$

и слѣдовательно онъ не можетъ быть степени выше чѣмъ E. Отсюда видно, что функція E или вообще функція λE, гдѣ λ есть число не дѣлящееся на p и будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ по модулю p функцій A и B.

Если мы не дойдемъ до такой функціи, что дѣленіе совершится безъ остатка, то мы непремѣнно придемъ къ остатку неравному нулю по модулю p и не содержащему x. Въ такомъ случаѣ функціи A и B не будутъ имѣть общаго дѣлителя и мы назовемъ ихъ *взаимно-простыми по модулю* p.

Примѣчаніе. Если A и B имѣютъ общаго наибольшаго дѣлителя λE, то число λ лучше всего выбрать такъ, чтобы коэффиціентъ высшаго члена λE былъ сравнимъ съ единицею по модулю p, что всегда возможно, потому что въ функціи λE можно выбросить всѣ члены, коэффиціенты которыхъ дѣлятся на p.

4.

Теорема. *Если A и B суть функціи взаимно простыя по модулю p, то всегда можно найти такія функціи P и Q, что*

$$PA - QB \equiv 1 \text{ (мод. } p).$$

Доказат. Произведемъ надъ функціями A и B то дѣйствіе, при помощи котораго ищется общій наибольшій дѣлитель. Пусть

$$A \equiv aB + C,\quad B \equiv bC + D \text{ и т. д. } K \equiv kL + M \text{ (мод. } p),$$

гдѣ M есть число независящее отъ x.

Составляемъ теперь рядъ функцій

$$a,\ a',\ a'',\ \ldots\ a^{(\lambda)}$$
$$1,\ b,\ b',\ \ldots\ b^{(\lambda-1)},$$

которыя суть числители и знаменатели послѣдовательныхъ подходящихъ дробей непрерывной дроби

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cdots \cfrac{1}{g + \cfrac{1}{k}}}}$$

Такъ что

$$a' = ab + 1,\quad a'' = ca' + a,\quad a''' = da'' + a' \text{ и т. д.}$$
$$b' = bc + 1,\quad b'' = db' + b \quad . \; . \; . \; . \; .$$

При этомъ будемъ имѣть

$$A - aB = C,\quad bA - a'B = bC - B = -D \text{ и т. д.}$$

и наконецъ

$$b^{(\lambda-1)} A - a^{(\lambda)} B = \pm M.$$

Пусть теперь μ будетъ такое число, что

$$\pm \mu M \equiv 1 \text{ (мод. } p\text{)}.$$

Положивъ

$$\mu b^{(\lambda-1)} \equiv P,\quad \mu a^{(\lambda)} \equiv Q \text{ (мод. } p\text{)},$$

получимъ

$$PA - QB \equiv 1 \text{ (мод. } p\text{)}.$$

Изъ доказанной теоремы выводятся такія же слѣдствія какъ и изъ подобной теоремы для цѣлыхъ чиселъ.

Слѣдствіе. Если M есть общій наибольшій дѣлитель A и B, то всегда можно найти такія двѣ цѣлыя функціи P и Q, что

$$PA - QB \equiv M \text{ (мод. } p\text{)}.$$

5.

Теорема. *Если функція A, простая относительно B по модулю p, дѣлитъ произведеніе BC по этому модулю, то она дѣлитъ также и функцію C.*

Доказат. Пусть P и Q будутъ функціи удовлетворяющія сравненію ($n^0 4$)

(1) $$PA - QB \equiv 1 \text{ (мод. } p\text{)}$$

и пусть

$$BC \equiv AD \text{ (мод. } p\text{)}.$$

Умноживъ обѣ части сравненія (1) на C, получимъ

$$(PC - QD)\,A \equiv C \text{ (мод. } p\text{)}.$$

Изъ этого сравненія видно, что C дѣлится на A по модулю p.

Слѣдствіе. Если функція A взаимно простая съ B и C по модулю p, то она также будетъ простая и относительно произведенія BC.

6.

Функція недѣлящаяся по модулю p ни на какую функцію степени низшей называется *простою по этому модулю*[3]. Напримѣръ

$$x^2 + 1,\quad x^3 + 2$$

суть простыя функціи по модулю 7.

Если A будетъ какая нибудь простая функція по модулю p, то и λA, гдѣ λ означаетъ какое нибудь цѣлое число недѣлящееся на p, будетъ также простая функція. Всѣ эти функціи мы будемъ считать за одну. Число λ можно выбрать такъ, чтобы коеффиціентъ высшаго члена функціи λA былъ сравнимъ съ единицею по модулю p.

Изъ доказанной выше теоремы (n^0 5) слѣдуютъ такія:

Теорема. *Если простая функція A по модулю p дѣлитъ по этому модулю произведеніе функцій BCD . . . , то она дѣлитъ одинъ изъ множителей B, C, D, ...*

Теорема. *Если простая по модулю p функція A не дѣлитъ по этому модулю ни одной изъ функцій B, C, D. . . . , то она не можетъ дѣлить и ихъ произведенія BCD. . . .*

7.

Если функція A не есть простая по модулю p, то ее можно разложить на произведеніе простыхъ. Дѣйствительно, такъ какъ A не есть простая функція по модулю p, то она должна дѣлиться по этому модулю на нѣкоторую функцію B степени низшей и т д. Понятно, что разсуждая такимъ образомъ мы непремѣнно дойдемъ до нѣкоторой простой функціи L, которая будетъ дѣлить A; такъ что

$$A \equiv LA_1 \quad (\text{мод. } p),$$

гдѣ A_1 степени ниже чѣмъ A. Если A_1 не есть простая функція, то опять можно положить

$$A_1 \equiv L_1 A_2 \quad (\text{мод. } p),$$

гдѣ L_1 есть простая функція и A_2 степени ниже чѣмъ A_1 и т. д. Очевидно изъ этого, что A можно представить въ видѣ

$$A \equiv LL_1L_2 \ldots . \quad (\text{мод. } p),$$

гдѣ L, L_1, L_2 . . . . суть простыя функціи.

Докажемъ теперь, что существуетъ только одно разложеніе на простые множители. Дѣйствительно, пусть кромѣ разложенія

$$A \equiv LL_1L_2 \ldots . \quad (\text{мод. } p)$$

существуетъ еще другое

$$A \equiv MM_1M_2 \ldots . \quad (\text{мод. } p);$$

слѣдовательно

$$LL_1L_2 \ldots . \equiv MM_1M_2 \ldots . \quad (\text{мод. } p)$$

т. е.

$$LL_1L_2 \ldots . \equiv MM_1M_2 \ldots . + pN, \tag{1}$$

гдѣ N есть нѣкоторая функція x.

Такъ какъ изъ этого равенства слѣдуетъ, что простая функція L должна дѣлить по модулю p произведеніе MM_1M_2 . . . . , то между простыми функціями M, M_1, M_2 . . . . есть хотя одна сравнимая съ L по модулю p. Пусть $M = L + pQ$. Внося эту величину въ равенство (1), найдемъ

$$LL_1L_2 \ldots . = LM_1M_2 \ldots . + pN_1.$$

Отсюда ясно, что функція N_1 должна дѣлиться на L. Положивъ $N_1 = LN_2$, получимъ

$$L_1L_2 \ldots . = M_1M_2 \ldots . + pN_2.$$

Продолжая тоже разсужденіе далѣе, увидимъ, что множители M_1, M_2 . . . . отличаются только порядкомъ отъ L_1, L_2, ...

Можетъ случиться, что при разложеніи A на простыя функціи какія нибудь функціи L, L_1 . . . . войдутъ нѣсколько разъ множителями. Такъ что вообще можно положить

$$A \equiv L^n L_1^{n_1} L_2^{n_2} \ldots . \text{ (мод. } p),$$

гдѣ n, n_1, n_2 . . . . цѣлыя положительныя числа.

8.

Въ томъ случаѣ, когда функція имѣетъ кратныхъ множителей по модулю p, она и ея первая производная, какъ мы увидимъ, имѣютъ общаго дѣлителя по этому модулю. На основаніи этого свойства можно отдѣлить нѣкоторые множители A при помощи алгебраическаго дѣленія, подобно тому какъ отдѣляются кратные корни въ алгебраическихъ уравненіяхъ.

Мы докажемъ слѣдующую теорему:

Теорема. *Если функція* $A \equiv L^n L_1^{n_1} \ldots L_\lambda^{n_\lambda}$ (мод. p), *гдѣ* L, L_1 . . . . L_λ *простыя функціи и* n, n_1, . . . n_λ *цѣлыя числа, то* A *будетъ имѣть общихъ дѣлителей по модулю* p *со своею первою производною. Какой нибудь множитель* A *напр.* L *войдетъ въ общаго наибольшаго дѣлителя съ показателемъ* $n - 1$, *если* n *не дѣлится на* p *и съ показателемъ* n, *если* $n \equiv 0$ (мод. p).

Доказат. Взявъ дѣйствительно первую производную A, получимъ

$$A' \equiv L^{n-1} L_1^{n_1-1} \ldots L_\lambda^{n_\lambda-1}(nL'L_1 \ldots L_\lambda + n_1 LL'_1 \ldots L_\lambda + \ldots + n_\lambda LL_1 \ldots L'_\lambda) \text{ (мод. } p).$$

Если n не дѣлится на p, то функція стоящая въ скобкахъ не будетъ дѣлиться на L по модулю p, потому что всѣ ея члены дѣлятся на L за исключеніемъ

$$nL'L_1 \ldots . L_\lambda,$$

который не можетъ дѣлиться на L, потому что L_1, L_2 . . . . L_λ суть простыя функціи отличныя отъ L, а L' будучи степени ниже чѣмъ L не можетъ дѣлиться на L. Такъ что въ этомъ случаѣ L войдетъ въ общаго наибольшаго дѣлителя съ показателемъ $n - 1$. Если же n дѣлится на p, то функція стоящая въ скобкахъ дѣлится на L по модулю p, и въ общаго наибольшаго дѣлителя A и A' войдетъ L^n. Тоже самое можно сказать и относительно другихъ множителей

$$L_1, L_2 \ldots L_\lambda.$$

Чтобы примѣнить теперь эту теорему къ отдѣленію кратныхъ множителей A, положимъ опять

(1) $$A \equiv L^n L_1^{n_1} \ldots . L_\lambda^{n_\lambda} \text{ (мод. } p)$$

и пусть

$$n = sp + r,\ n_1 = s_1 p + r_1 \ldots . n_\lambda = s_\lambda p + r_\lambda,$$

гдѣ

$$s,\ s_1 \ldots . s_\lambda$$

суть частныя, а

$$r,\ r_1 \ldots . r_\lambda$$

остатки отъ дѣленія

$$n,\ n_1 \ldots . n_\lambda$$

на p.

Сравненіе (1) представляется въ такомъ видѣ:

$$A \equiv (L^s L_1^{s_1} \ldots . L_\lambda^{s_\lambda})^p L^r L_1^{r_1} \ldots . L_\lambda^{r_\lambda} \text{ (мод. } p).$$

Обозначивъ $L^s L_1^{s_1} \ldots . L_\lambda^s$ черезъ Q, мы можемъ переписать предыдущее сравненіе еще такъ:

$$A \equiv Q^p V_1 V_2^2 \ldots . V_{p-1}^{p-1},$$

гдѣ V_1 означаетъ произведеніе всѣхъ тѣхъ простыхъ функцій, которыя входятъ по модулю p въ функцію $L^r L_1^{r_1} \ldots . L_\lambda^{r_\lambda}$ въ первой степени, V_2 — произведеніе всѣхъ простыхъ функцій, которыя входятъ въ квадратѣ и т. д. Если функція $L^r L_1^{r_1} \ldots . L_\lambda^{r_\lambda}$ не содержитъ простыхъ функцій въ нѣкоторой степени k, то V_k будетъ равно единицѣ.

Чтобы показать какимъ образомъ отдѣляются равные множители, мы разсмотримъ случай, когда

$$A \equiv Q^p V_1 V_2^2 V_3^3 \text{ (мод. } p).$$

Общій наибольшій дѣлитель D для функцій A и A', по доказанной выше теоремѣ, будетъ

$$D \equiv Q^p V_2 V_3^2 \text{ (мод. } p).$$

Общій наибольшій дѣлитель для D и D' (первой производной D) выразится такъ:

$$D_1 \equiv Q^p V_3 \text{ (мод. } p).$$

Наконецъ общій наибольшій дѣлитель D_2 между D_1 и D_1' будетъ

$$D_2 \equiv Q^p \text{ (мод. } p).$$

Тогда положивъ

$$S \equiv \frac{A}{D},\ S_1 \equiv \frac{D}{D_1},\ S_2 \equiv \frac{D_1}{D_2} \text{ (мод. } p),$$

получимъ

$$S \equiv V_1 V_2 V_3,\ S_1 \equiv V_2 V_3,\ S_2 \equiv V_3 \text{ (мод. } p)$$

слѣдовательно

$$V_1 \equiv \frac{S}{S_1},\ V_2 \equiv \frac{S_1}{S_2},\ V_3 \equiv S_2 \text{ (мод. } p).$$

Такъ что V_1, V_2, V_3 и Q^p опредѣляются отдѣльно при помощи алгебраическихъ дѣленій. Чтобы опредѣлить функцію Q мы воспользуемся одною леммою

Лемма. *Пусть A,B, C, D будутъ функціи x или цѣлыя числа, тогда*

$$(A + B + C + D)^p \equiv A^p + B^p + C^p + D^p \quad (\text{мод. } p).$$

Доказат. Для двухъ функцій A и B справедливось леммы видна изъ формулы для степени бинома. Дѣйствительно, раскрывая $(A + B)^p$ по этой формулѣ и замѣчая, что p число простое, мы найдемъ, что коеффиціенты всѣхъ членовъ за исключеніемъ перваго и послѣдняго дѣлятся на p, а потому

$$(A + B)^p \equiv A^p + B^p \quad (\text{мод. } p).$$

Для трехъ функцій мы получимъ, принимая сумму двухъ функцій $B + C$ за одну функцію,

$$(A + B + C)^p \equiv A^p + (B + C)^p \quad (\text{мод. } p)$$

и слѣдовательно

$$(A + B + C)^p \equiv A^p + B^p + C^p \quad (\text{мод. } p).$$

Очевидно, что лемма справедлива для сколькихъ угодно функцій.

Теперь покажемъ какимъ образомъ выражается степень p какой нибудь функціи

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_m x^m$$

по модулю p.

Прилагая къ этому случаю предыдущую лемму, получимъ

$$\begin{aligned} \varphi^p(x) &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_m x^m)^p \\ &\equiv a_0{}^p + a_1{}^p x^p + a_2{}^p x^{2p} + \ldots\ldots + a_m^p x^{mp} \quad (\text{мод. } p). \end{aligned}$$

Замѣчая, что, по теоремѣ Фермата,

$$a_0{}^p \equiv a_0, \quad a_1{}^p \equiv a_1, \quad a_2{}^p \equiv a_2 \;\ldots\ldots\; a_m^p \equiv a_m \quad (\text{мод. } p),$$

будемъ имѣть

$$\varphi^p(x) \equiv a_0 + a_1 x^p + a_2 x^{2p} + \ldots\ldots + a_m x^{mp} \equiv \varphi(x^p) \quad (\text{мод } p).$$

И такъ, чтобы возвысить $\varphi(x)$ въ степень p по модулю p, надобно x замѣнить черезъ x^p; по этому если какая нибудь функція равна по модулю p степени p другой функціи, то она должна содержать только члены со степенями x кратными p, если отбросить члены дѣлящіеся на p.

Обращаясь теперь къ опредѣленію функціи Q, мы заключаемъ изъ сравненія

$$D_2 \equiv Q^p \quad (\text{мод. } p)$$

что функція D_2 должна содержать по замѣченному выше только члены со степенями x кратными p, и мы получимъ Q замѣнивъ x^p черезъ x въ функціи D_2.

Такимъ образомъ мы разложимъ функцію A на функціи V_1, V_2, V_3 не имѣющія кратныхъ множителей и на функцію Q степени ниже чѣмъ A. Прилагая тотъ же анализъ къ функціи Q, а потомъ и къ послѣдующимъ функціямъ, мы разложимъ A на функціи не имѣющія кратныхъ множителей. Теперь мы пояснимъ опредѣленіе кратныхъ множителей примѣромъ. Пусть

$$A \equiv x^{22} + 2x^{21} + 2x^{15} + 4x^{14} + x^8 + 2x^7 + 2x + 4 \quad (\text{мод. } 7);$$

слѣдовательно

$$A' \equiv x^{21} + 2x^{14} + x^7 + 2 \text{ (мод. 7)}.$$

Раздѣливъ A на A', находимъ въ частномъ $x + 2$. Замѣчая, что

$$A' \equiv (x^3 + 2x^2 + x + 2)^7 \text{ (мод. 7)},$$

мы будемъ имѣть

$$A \equiv (x^3 + 2x^2 + x + 2)^7 . (x + 2) \text{ (мод. 7)}.$$

Такъ что въ этомъ случаѣ A' и будетъ замѣнять Q^p. Теперь надобно узнать имѣетъ ли функція

$$Q = x^3 + 2x^2 + x + 2$$

кратныхъ множителей по модулю 7. Мы имѣемъ

$$Q' = 3x^2 + 4x + 1 = (x + 1)(3x + 1) \equiv 3(x - 2)(x + 1) \text{ (мод. 7)}.$$

Замѣчая, что Q не дѣлится по модулю 7 ни на $x + 1$, ни на $x - 2$, мы видимъ, что нѣтъ общихъ дѣлителей по модулю 7 у Q и Q', а слѣдовательно Q не имѣетъ кратныхъ множителей.

9.

Переходимъ теперь къ опредѣленію числа простыхъ функцій данной степени по данному модулю. Это число находится при помощи нѣкоторыхъ теоремъ, къ выводу которыхъ мы сначала и обратимся.

Если раздѣлимъ по модулю p нѣкоторую функцію A на простую функцію B какой нибудь степени ν, то получимъ нѣкоторое частное Q и остатокъ R степени не выше $\nu - 1$, коеффиціенты котораго можно замѣнить ихъ вычетами, заключенными между предѣлами 0 и p или между предѣлами $-\frac{p-1}{2}$ и $\frac{p-1}{2}$. Такимъ образомъ мы получимъ

$$A \equiv QB + R \text{ (мод. } p).$$

Функцію R мы будемъ называть наименьшимъ вычетомъ A по модулю p и простой функціи B.

Двѣ функціи имѣющія одинаковые вычеты называются сравнимыми по модулю p и функціи B.

Наименьшіе вычеты всѣхъ функцій заключаются въ такой формѣ:

$$R = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{\nu-1} x^{\nu-1},$$

гдѣ каждый изъ коеффиціентовъ $a_0, a_1, \ldots a_{\nu-1}$ можетъ имѣть p значеній

$$0, 1, 2, \ldots p - 1;$$

такъ что число всѣхъ различныхъ вычетовъ будетъ $p^\nu - 1$, если исключить 0; между ними есть $p - 1$ вычетовъ

$$1, 2, \ldots p - 1,$$

не содержащихъ x.

10.

Теорема. *Пусть*

$$F(X) = A_0X^m + A_1X^{m-1} + \ldots + A_{m-1}X + A_m$$

будетъ цѣлая функція двухъ перемѣнныхъ x и X съ цѣлыми коеффиціентами, мы докажемъ, что не можетъ существовать болѣе m различныхъ функцій x $X_1, X_2, \ldots X_m$ не сравнимыхъ между собою по модулю p и нѣкоторой простой функціи P и такихъ, что всѣ результаты

$$F(X_1),\ F(X_2)\ \ldots\ F(X_m)$$

дѣлились бы на P по модулю p; мы предполагаемъ A_0 недѣлящимся на P по модулю p.

Доказат. Для $m = 1$ эта теорема доказывается весьма просто. Положимъ, что

$$F(X) = A_0X + A_1$$

дѣлится на P по модулю p, напримѣръ, при двухъ значеніяхъ

$$X = X_1 \text{ и } X = X_2\,,$$

не сравнимыхъ между собою по модулю p и функціи P. Тогда и разность

$$F(X_1) - F(X_2) = A_0(X_1 - X_2)$$

должна дѣлиться на P по модулю p, чего на самомъ дѣлѣ нѣтъ, потому что ни A_0, ни разность $X_1 - X_2$ не дѣлятся на P по модулю p. Предположимъ теперь, что теорема справедлива для какого нибудь числа $m - 1$ и докажемъ, что она справедлива также и для m. Допустимъ, что существуетъ k функцій $X_1, X_2, \ldots X_k$ не сравнимыхъ между собою по модулю p и функціи P и такихъ, что $F(X_1)$, $F(X_2)$, $\ldots$ $F(X_k)$ дѣлятся на P по модулю p; пусть $k > m$.

Раздѣлимъ алгебраически $F(X)$ на $X - X_1$; мы получимъ нѣкоторое частное $F_1(X)$ степени $m - 1$ относительно X, того же вида какъ и $F(X)$ и остатокъ $F(X_1)$ дѣлящійся на P по модулю p. Поэтому будемъ имѣть такое сравненіе:

$$F(X) \equiv (X - X_1)\, F_1(X) + AP \text{ (мод. } p),$$

гдѣ A нѣкоторая функція x.

Внося въ это сравненіе вмѣсто X послѣдовательно X_2, X_3, $\ldots$ X_k и замѣчая, что, по предположенію, $F(X_2)$, $F(X_3)$, $\ldots$ $F(X_k)$ дѣлятся на P по модулю p, мы найдемъ, что $(X_h - X_1)\, F_1(X_h)$, гдѣ h какое угодно изъ чиселъ $2, 3, \ldots k$ дѣлится на P по модулю p. Такъ какъ разность $X_h - X_1$ не дѣлится на P по модулю p, то $F_1(X_h)$ должно дѣлиться на P по модулю p.

И такъ мы имѣемъ болѣе $m - 1$ результатовъ

$$F_1(X_2),\ F_1(X_3)\ \ldots\ F_1(X_k)$$

дѣлящихся на P по модулю p. Въ этомъ заключается противорѣчіе, потому что степень $F_1(X)$ равна $m - 1$; такъ что теорема доказана вообще.

11.

Теорема[4]. *Всякая функція P степени ν простая по модулю p дѣлитъ по этому модулю функцію $x^{p^\nu} - x$.*

Доказат. Пусть

(1) $$X_1,\ X_2,\ \ldots\ .\ X_{p^\nu-1}$$

будутъ всевозможные различные наименьшіе вычеты по модулю p и функціи P.

Обозначимъ теперь черезъ A какую нибудь функцію недѣлящуюся на P по модулю p и разсмотримъ произведенія,

(2) $$AX_1,\ AX_2,\ \ldots\ .\ AX_{p^\nu-1},$$

A на всѣ члены ряда (1)

Ни одно изъ этихъ произведеній не дѣлится на P по модулю p, потому что множители изъ которыхъ состоятъ произведенія не дѣлятся на P по модулю p. Точно также разность какихъ нибудь двухъ членовъ строки (2) не дѣлится на P по модулю p, потому что эта разность сравнима по модулю p и функціи P съ однимъ изъ членовъ той же строки. И такъ если мы возьмемъ наименьшіе вычеты всѣхъ членовъ строки (2) по модулю p и функціи P, то получимъ снова всѣ вычеты (1) только въ другомъ порядкѣ. Такъ что вообще

$$AX_m \equiv X_n + B_m\ .\ P \text{ (мод. } p)$$

гдѣ B_m — нѣкоторый полиномъ относительно x съ цѣлыми коеффиціентами.

Перемножая всѣ такія сравненія, мы получимъ

$$X_1X_2\ \ldots\ .\ X_{p^\nu-1}A^{p^\nu-1} \equiv X_1X_2\ \ldots\ .\ X_{p^\nu-1} + PQ \text{ (мод. } p),$$

гдѣ Q также нѣкоторая функція x.

Изъ этого сравненія видно, что функція

$$X_1X_2\ \ldots\ .\ X_{p^\nu-1}(A^{p-1} - 1)$$

дѣлится на P по модулю p. Такъ какъ множитель $X_1X_2\ \ldots\ .\ X_{p^\nu-1}$ не дѣлится на P по модулю p, то $A^{p^\nu-1} - 1$ должно дѣлиться на P по модулю p. Умноживъ эту функцію на A и положивъ $A = x$, найдемъ, что

$$x^{p^\nu} - x$$

дѣлится на P по модулю p.

12.

Теорема[5]. *Функція $x^{p^\mu} - x$ можетъ дѣлиться по модулю p на простую функцію P степени ν только тогда, когда μ дѣлится на ν.*

Доказат. Во первыхъ покажемъ, что если μ меньше ν, то $x^{p^\mu} - x$ не дѣлится на P по модулю p. Допустимъ дѣйствительно, что

$$x^{p^\mu} - x \equiv PA \text{ (мод. } p)$$

гдѣ A нѣкоторая функція. Возьмемъ теперь какой нибудь изъ наименьшихъ вычетовъ по модулю p и простой функціи P напримѣръ

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{\nu-1} x^{\nu-1},$$

гдѣ $a_0, a_1, \ldots a_{\nu-1}$ — цѣлыя числа заключенныя въ предѣлахъ 0 и p.

Примѣняя къ $f(x)$ послѣдовательно μ разъ лемму $n^0 8$, получимъ

$$[f(x)]^{p^{\mu}} \equiv f(\alpha^{p^{\mu}}) \text{ (мод. } p).$$

Внося сюда вмѣсто $x^{p^{\mu}}$ сравнимую съ нимъ функцію по модулю p

$$x^{p^{\mu}} \equiv x + PA \text{ (мод. } p),$$

найдемъ

$$[f(x)]^{p^{\mu}} - f(x) \equiv PQ \text{ (мод. } p)$$

гдѣ Q — нѣкоторая функція x.

Отсюда слѣдуетъ, что функція

$$X^{p^{\mu}} - X$$

дѣлится по модулю p на P какой бы наименьшій вычетъ изъ $p^{\nu} - 1$ вычетовъ мы не подставили на мѣсто X, а это противурѣчитъ теоремѣ n^0 10, потому что $\mu < \nu$. Во вторыхъ намъ остается доказать, что если функція

$$x^{p^{\mu}} - x$$

дѣлится по модулю p на функцію P и $\mu > \nu$, то μ дѣлится на ν. Пусть q будетъ частное и r остатокъ отъ дѣленія μ на ν, такъ что $\mu = q\nu + r$. По теоремѣ $n^0 11$ функція P дѣлитъ по модулю p функцію

$$x^{p^{\nu}} - x = x(x^{p^{\nu}-1} - 1),$$

а эта послѣдняя раздѣляетъ алгебраически функцію

$$x(x^{p^{\nu q}-1} - 1) = x^{p^{\nu q}} - x,$$

потому что показатель $p^{\nu q} - 1$ дѣлится на $p^{\nu} - 1$. Такъ какъ, по предположенію, $x^{p^{\mu}} - x$ также дѣлится на P, то и разность

$$x^{p^{\mu}} - x - (x^{p^{\nu q}} - x) = x^{p^{\mu}} - x^{p^{\nu q}}$$

дѣлится на P по модулю p. Но эта послѣдняя разность сравнима по модулю p съ

$$(x^{p^{r}} - x)^{p^{\nu q}}$$

и слѣдовательно не можетъ дѣлиться на P безъ того, чтобы функція

$$x^{p^{r}} - x$$

не дѣлилась на P по модулю p; но послѣдняя функція не дѣлится на P, если r неравно нулю, такъ какъ r меньше ν.

13.

На основаніи предыдущихъ теоремъ мы можемъ легко убѣдиться, что существуютъ простыя функціи по модулю p каждой данной степени ν и даже можемъ найти число этихъ функцій.

Теоремы nn^0 11 и 12 можно выразить еще такимъ образомъ:

1-е. Функція $x^{p^\nu} - x$ можетъ дѣлиться по модулю p только на простыя функціи степени ν или степени δ, гдѣ δ есть дѣлитель ν.

2-е. Функція $x^{p^\nu} - x$ дѣлится по модулю p на каждую изъ простыхъ функцій степени ν.

3-е Функція $x^{p^\nu} - x$ дѣлится по модулю p на каждую изъ простыхъ функцій степени δ, гдѣ δ есть дѣлитель ν, потому что она алгебраически дѣлится на $x^{p^\delta} - x$.

Наконецъ замѣтимъ, что функція $x^{p^\nu} - x$ не имѣетъ кратныхъ множителей по модулю p, потому что ея первая производная сравнима съ -1 по модулю p.

Изъ всего этого слѣдуетъ, что функція $x^{p^\nu} - x$ равна по модулю p произведенію всѣхъ простыхъ функцій степени ν и степеней равныхъ дѣлителямъ ν.

И такъ, обозначая черезъ $[k]$ число простыхъ функцій по модулю p степени k, мы получимъ равенство

$$(1) \qquad p^\nu = \nu[\nu] + \delta[\delta] + \delta'[\delta'] + \delta''[\delta''] + \ldots . [1]$$

гдѣ $\delta, \delta', \delta'', \ldots . 1$ — всевозможные дѣлители ν; каждая часть этого равенства выражаетъ степень функціи $x^{p^\nu} - x$. Для $\nu = 1$, мы находимъ по формулѣ (1)

$$[1] = p.$$

Эти функціи суть

$$x,\ x - 1,\ x - 2, \ldots . x - p + 1.$$

Для $\nu = 2$, имѣемъ

$$p^2 = 2\,[2] + [1];$$

откуда находимъ

$$[2] = \frac{p^2 - p}{2}$$

и т. д.

Чтобы получить общее выраженіе $[\nu]$ мы положимъ, что

$$\nu = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots . q_\lambda^{\alpha_\lambda},$$

гдѣ $q_1, q_2, \ldots . q_\lambda$ — различныя простыя числа. Докажемъ предварительно такую лемму:

Лемма[6]. *Если развернемъ скобки въ выраженіи*

$$\nu\left(1 - \frac{1}{q_1}\right)\left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{q_\lambda}\right)$$

сдѣлавъ перемноженіе, то получимъ 2^λ цѣлыхъ чиселъ, изъ которыхъ половина будетъ положительныхъ и половина отрицательныхъ; такъ что можно положить

$$\nu\left(1 - \frac{1}{q_1}\right)\left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{q_\lambda}\right) = \Sigma\nu_1 - \Sigma\nu_2;$$

само число ν входитъ въ совокупность чиселъ ν_1. Обозначивъ черезъ δ какой нибудь дѣлитель ν меньшій ν, мы докажемъ, что между числами ν_1 будетъ столько же дѣлящихся на δ сколько и между числами ν_2.

Примѣръ. $\nu = 60$

$$60(1 - \tfrac{1}{2})(1 - \tfrac{1}{3})(1 - \tfrac{1}{5}) = 60 + 10 + 6 + 4 - 30 - 20 - 12 - 2$$

Полагая напримѣръ $\delta = 10$, мы видимъ, что какъ между числами ν_1, такъ и между числами есть два числа дѣлящіяся на 10.

Доказат. Такъ какъ δ меньше ν, то между числами

$$q_1, q_2, \ldots . q_\lambda$$

будетъ по крайней мѣрѣ одно число, которое входитъ въ δ съ меньшимъ показателемъ, чѣмъ въ

Пусть одно изъ такихъ чиселъ будетъ q_i.

Составимъ произведеніе

$$\nu\left(1 - \frac{1}{q_1}\right)\left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{q_{i-1}}\right)\left(1 - \frac{1}{q_{i+1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{q_\lambda}\right)$$
$$= \Sigma A - \Sigma B.$$

Въ каждое изъ чиселъ A и B множитель q_i входитъ въ степени α_i, какъ и въ число ν. Чтобы перейдти отъ этого произведенія къ произведенію

$$\nu\left(1 - \frac{1}{q_1}\right)\left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{q_\lambda}\right)$$

надобно его умножить на $1 - \frac{1}{q_i}$; такъ что изъ каждаго числа A получимъ два A и $- \frac{A}{q_i}$, а изъ каждаго B два числа B и $- \frac{B}{q_i}$.

Замѣтимъ, что если какое нибудь число A или B не дѣлится на δ, то и оба числа изъ него полученныя не будутъ дѣлиться на δ; если же какое нибудь число A или B дѣлится на δ, то и оба числа изъ него полученныя дѣлятся на δ, потому что q_i входитъ въ δ съ показателемъ по крайней мѣрѣ на единицу меньшимъ чѣмъ въ ν и, слѣдоват., чѣмъ въ A или B.

Кромѣ того одно изъ этихъ чиселъ будетъ принадлежать къ числамъ ν_1, а другое къ числамъ ν_2. Положимъ теперь, что между числами A есть h дѣлящихся на δ, а между числами B такихъ чиселъ k. Тогда изъ замѣченнаго сейчасъ слѣдуетъ, что какъ между числами ν_1 такъ и между числами ν_2 будетъ $h + k$ чиселъ дѣлящихся на δ ч. и т. д.

Приложимъ теперь эту лемму къ опредѣленію числа $[\nu]$ изъ уравненія

$$p^\nu = \nu[\nu] + \delta[\delta] + \delta'[\delta'] + \delta''[\delta''] + \ldots . + [1].$$

Замѣнимъ здѣсь ν послѣдовательно всѣми числами ν_1, а потомъ всѣми числами ν_2 и составимъ выраженіе

$$\Sigma p^{\nu_1} - \Sigma p^{\nu_2}.$$

Въ этомъ выраженіи сократятся всѣ члены вида

$$\delta[\delta],$$

гдѣ ∂ какой нибудь дѣлитель ν меньшій ν, потому что, по предъидущей леммѣ, они войдутъ столько же разъ съ $+$, сколько съ $-$, такъ что

$$\Sigma p^{\nu_1} - \Sigma p^{\nu_2} = \nu[\nu]$$

и слѣдовательно

$$[\nu] = \frac{\Sigma p^{\nu_1} - \Sigma p^{\nu_2}}{\nu}.$$

14.

Мы теперь сдѣлаемъ дополненіе къ тому, что было сказано о разложеніи на простыя функціи. Если требуется разложить данную функцію A на простые множители по модулю p, то надобно сначала опредѣлить не имѣетъ ли эта функція кратныхъ дѣлителей; если имѣетъ, то она можетъ быть представлена подъ видомъ

$$A \equiv V_1^{n_1} V_2^{n_2} \dots \quad (\text{мод. } p)$$

гдѣ V_1, V_2 и т. д. не имѣютъ уже кратныхъ дѣлителей и опредѣляются, какъ мы видѣли выше, посредствомъ алгебраическаго дѣленія.

И такъ вопросъ приведется только къ тому случаю, когда A не имѣетъ кратныхъ множителей по модулю p. Допустивъ это, мы найдемъ общаго наибольшаго дѣлителя функцій A и $x^p - x$ по модулю p. Этотъ дѣлитель и будетъ представлять, какъ это слѣдуетъ изъ предыдущихъ теоремъ, произведеніе всѣхъ простыхъ множителей A первой степени. Обозначивъ его черезъ P_1, мы получимъ

$$A \equiv P_1 A_1 \quad (\text{мод. } p),$$

гдѣ A_1 нѣкоторая функція. P_1 можетъ быть равнымъ единицѣ. Точно также мы получимъ произведеніе простыхъ множителей A второй степени, отыскавъ общій наибольшій дѣлитель функцій A_1 и $x^{p^2} - x$. Обозначая этотъ дѣлитель, который также можетъ быть равенъ единицѣ, черезъ P_2, получимъ

$$A_1 \equiv P_2 A_2 \quad (\text{мод. } p).$$

Продолжая поступать такимъ образомъ далѣе, мы непремѣнно дойдемъ до числа A_m не содержащаго x; такъ что

$$A \equiv A_m \,.\, P_1 P_2 \dots P_m \quad (\text{мод. } p).$$

Чтобы закончить разложеніе A на простые множители, намъ надобно показать какимъ образомъ разлагается каждый изъ полиномовъ P_ν на простые множители степени ν. Съ этою цѣлью можно поступить такъ: раздѣлимъ полиномъ P_ν на функцію

$$x^\nu + a_1 x^{\nu-1} + a_2 x^{\nu-2} + \dots + a_\nu,$$

гдѣ коеффиціенты $a_1, a_2 \dots a_\nu$ суть неопредѣленныя количества и выразимъ, что остатокъ степени $\nu - 1$ полученный при этомъ дѣленіи дѣлится на p. Это намъ дастъ ν сравненій, изъ которыхъ мы и опредѣлимъ коеффиціенты $a_1, a_2, \dots a_\nu$.

15.

О функціи $\frac{x^n-1}{x-1}$.

Очень замѣчательный примѣръ разложенія функцій на простые множители по нѣкоторому модулю представляетъ функція $\frac{x^n-1}{x-1}$. Модуль p, какъ всегда, будемъ считать простымъ числомъ.

Если n дѣлится на p, то, полагая

$$n = p^{\mu}\nu,$$

гдѣ ν уже не дѣлится на p, будемъ имѣть

$$x^n - 1 \equiv (x^{\nu} - 1)^{p^{\mu}} \text{ (мод. } p)$$

и слѣдовательно достаточно разсмотрѣть только функцію $x^n - 1$ при n недѣлящемся на p. При $n = p$, имѣемъ

$$x^p - 1 \equiv (x - 1)^p \text{ (мод. } p)$$

и, слѣдовательно, $x^p - 1$ по модулю p равно степени p линейнаго множителя. Предполагая теперь что n не дѣлится на p, мы докажемъ слѣдующія предложенія.

Замѣтимъ прежде всего, что функція x^n-1 не имѣетъ кратныхъ множителей по модулю p, потому что иначе она имѣла бы по этому модулю общаго дѣлителя съ ея первою производною nx^{n-1}, чего очевидно нѣтъ.

Теорема I. *Всякій простой по модулю p множитель функціи $x^n - 1$ принадлежитъ также и функціи $x^{\lambda n} - 1$, гдѣ λ — какое нибудь цѣлое число.*

Дѣйствительно, функція $x^{\lambda n}-1$ дѣлится алгебраически на функцію x^n-1; слѣдовательно всѣ множители по какому угодно модулю функціи $x^n - 1$ будутъ также принадлежать и функціи $x^{n\lambda} - 1$.

Теорема II. *Всякій общій дѣлитель по модулю p функцій $\frac{x^n-1}{x-1}$ и $\frac{x^{\lambda}-1}{x-1}$ будетъ также дѣлителемъ функціи $\frac{x^{\delta}-1}{x-1}$, гдѣ δ есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ n и λ.*

Пусть s и t будутъ какія нибудь цѣлыя положительныя числа удовлетворяющія уравненію

$$sn - t\lambda = \delta.$$

Общій дѣлитель по модулю p функцій $\frac{x^n-1}{x-1}$ и $\frac{x^{\lambda}-1}{x-1}$ будетъ также общимъ дѣлителемъ функцій $\frac{x^{sn}-1}{x-1}$ и $\frac{x^{t\lambda}-1}{x-1}$, и также ихъ разности

$$\frac{x^{sn}-x^{t\lambda}}{x-1} = x^{t\lambda}\,\frac{x^{\delta}-1}{x-1};$$

а, слѣдовательно, онъ будетъ дѣлить по модулю p функцію $\frac{x^{\delta}-1}{x-1}$.

Теорема III. *Если n будетъ число простое и p принадлежитъ*[7] *къ показателю h по модулю n, гдѣ h есть, какъ извѣстно, дѣлитель $n - 1$, то функція $\frac{x^n - 1}{x - 1}$ равна по модулю p произведенію $\frac{n-1}{h}$ простыхъ функцій степени h.*

Во первыхъ замѣтимъ, что функція

$$\frac{x^n - 1}{x - 1}$$

не можетъ имѣть по модулю p никакихъ дѣлителей, кромѣ простыхъ функцій степени h или степеней кратныхъ h. Дѣйствительно, допустимъ, что функція $\frac{x^n - 1}{x - 1}$ дѣлится по модулю p на нѣкоторую простую функцію степени ν. Эта функція (n^0 11) раздѣлитъ также по модулю p функцію

$$x^{p^\nu} - x = x(x^{p^\nu - 1} - 1)$$

и, слѣдовательно, $p^\nu - 1$ дѣлится на n (теорема II этого n^0)

т. е. $$p^\nu \equiv 1 \text{ (мод. } n);$$

но p принадлежитъ къ показателю h, слѣдовательно ν есть кратное h.

Во вторыхъ докажемъ, что функція $\frac{x^n - 1}{x - 1}$ не можетъ дѣлиться, по модулю p, на простыя функціи степени которыхъ суть кратныя h и не равны h. Для этого замѣтимъ, что функція $\frac{x^n - 1}{x - 1}$ алгебраически дѣлитъ функцію $x^{p^h} - x = x(x^{p^h - 1} - 1)$. Вслѣдствіе этого допустивъ, что функція $x^n - 1$ дѣлится по модулю p на простую функцію степени $\nu = \lambda h$, гдѣ $\lambda > 1$, мы нашли бы, что эта функція дѣлитъ по модулю p $x^{p^h} - x$, гдѣ $h < \nu$, въ чемъ заключается противорѣчіе (n^0 12).

16.

О періодахъ[8],

Чтобы на самомъ дѣлѣ получить тѣ $\frac{n-1}{h}$ простыхъ множителей степени h, на которые разлагается, какъ мы видѣли, функція $\frac{x^n - 1}{x - 1}$, при n простомъ, по модулю p, мы разсмотримъ свойства такъ называемыхъ періодовъ и покажемъ, что при этомъ существуетъ полная аналогія съ рѣшеніемъ уравненія $x^n - 1 = 0$.

Условимся сначала въ нѣкоторыхъ опредѣленіяхъ:

Мы будемъ говорить, что двѣ функціи A и B сравнимы между собою по нѣкоторой функціи U, если ихъ разность $A - B$ алгебраически дѣлится на U т. е. $\frac{A - B}{U}$ будетъ цѣлая функція съ цѣлыми коеффиціентами. Это сравненіе изображается такъ:

$$A \equiv B \ (U).$$

Если разность двухъ функцій A и B дѣлится на функцію U по модулю p, то мы будемъ говорить, *что функція A сравнима съ B по модулю p и функціи U* (n^0 9).

Это сравненіе изображается такъ:

$$A \equiv B \text{ (мод. } p,\ U).$$

Такія сравненія можно также складывать и умножать какъ и обыкновенныя сравненія.

Условившись въ этомъ и положивъ

$$U = \frac{x^n - 1}{x - 1},$$

гдѣ n число простое, мы докажемъ, что въ ряду функцій

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots .\ x^{n-1},\ x^n,\ x^{n+1},\ \ldots . \tag{1}$$

первыя n членовъ не сравнимы между собою по функціи U. Дѣйствительно, разность

$$x^m - x^r$$

гдѣ m и r положительныя цѣлыя числа меньшія n не можетъ дѣлиться алгебраически на U.

Затѣмъ каждый изъ членовъ ряда (1) слѣдующихъ послѣ n-го сравнимъ по функціи U съ однимъ изъ членовъ

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots .\ x^{n-1}.$$

Дѣйствительно, возьмемъ какую нибудь функцію x^m, гдѣ $m \geqq n$. Раздѣлимъ m на n и пусть s будетъ частное, а r остатокъ меньшій n. Тогда

$$m = sn + r.$$

Разность

$$x^m - x^r = x^r(x^{sn} - 1)$$

очевидно дѣлится на U и слѣдовательно

$$x^m \equiv x^r\ (U).$$

Функціи

$$x,\ x^2,\ \ldots .\ x^{n-1}$$

могутъ быть распредѣлены въ періоды слѣдующимъ образомъ:

Положимъ

$$n - 1 = ef,$$

гдѣ e и f два дѣлителя n—1, и пусть g есть первообразный корень числа n. Такъ какъ мы теперь будемъ разсматривать сравненія по функціи U, то вмѣсто функцій

$$x,\ x^2,\ \ldots .\ x^{n-1}$$

мы можемъ взять функціи

$$x,\ x^g,\ x^{g^2}\ \ldots .\ x^{g^{n-2}} \tag{2}$$

сравнимыя съ первыми по функціи U, потому что наименьшіе положительные вычеты чиселъ

$$1,\ g,\ g^2\ \ldots,\ .\ g^{n-2}$$

по модулю n отличаются, какъ извѣстно, только порядкомъ отъ чиселъ

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots .\ n-1;$$

а мы видѣли выше, что функціи x^m и x^r сравнимы по функціи U, если $m \equiv r$ (мод. n).

Изъ количествъ (2) мы составимъ выраженія

$$(3) \qquad \left.\begin{array}{l} \xi \quad \equiv x \quad + x^{g} \quad + x^{g^{2e}} + \ldots . + x^{g^{(f-1)e}} \\ \xi_1 \quad \equiv x^{g} \quad + x^{g^{e+1}} + x^{g^{2e+1}} + \ldots . + x^{g^{(f-1)e+1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_{e-1} \equiv x^{g^{e-1}} + x^{g^{2e-1}} + x^{g^{3e-1}} + \ldots . + x^{g^{fe-1}} \end{array}\right\} (U)$$

Эти выраженія мы будемъ называть *періодами*. Функціи $\xi,\ \xi_1 \ldots .\ \xi_{e-1}$ не совершенно опредѣлены, потому что онѣ даны при помощи сравненій по функціи U. Можно было бы уничтожить эту неопредѣленность принявши за функцію ξ остатокъ степени не выше $n-2$, который получится при дѣленіи

$$x + x^{g^e} + x^{g^{2e}} + \ldots .\ x^{g^{(f-1)e}}\ .$$

на U, но въ этомъ нѣтъ необходимости.

17.

Относительно періодовъ мы сдѣлаемъ слѣдующія замѣчанія:

I) Періоды

$$\xi,\ \xi_1,\ \ldots .\ \xi_{e-1}$$

получаются послѣдовательно одинъ изъ другаго перемѣною x на x^g. Если сдѣлать туже подстановку въ періодѣ ξ_{e-1}, то получится, $\xi_e \equiv \xi\ (U)$.

Далѣе періоды будутъ повторяться, такъ что вообще

$$(1) \qquad \xi_{\lambda e+h} \equiv \xi_h\ (U)$$

Изъ сравненія (1) слѣдуетъ, что если x замѣнить на x^μ, гдѣ $\mu \equiv g^{\lambda e}$ (мод. n), то періоды обращаются сами въ себя, Если же $\mu \equiv g^{\lambda e+h}$ (мод. n), то періоды

$$\xi,\ \xi_1,\ \ldots .\ \xi_{e-1}$$

обратятся соотвѣтственно въ

$$\xi_h,\ \xi_{h+1},\ \ldots .\ \xi_{h+e-1}$$

Замѣняя наконецъ въ періодѣ ξ x на $x^{\lambda n}$, гдѣ λ какое нибудь цѣлое положительное число, получимъ функцію

$$A = x^{\lambda n} + x^{\lambda n g^e} + \ \ldots + x^{\lambda n g^{(f-1)e}}.$$

Замѣчая, что

$$x^{kn} - 1,$$

гдѣ k-какое нибудь цѣлое положительное число, дѣлится на U, мы найдемъ, что

$$A \equiv f\ (U)$$

Обозначая слѣдовательно черезъ $[f,\ \lambda]$ сумму

$$x^{\lambda} + x^{\lambda y^{e}} + x^{\lambda g^{2e}} + \ldots\ldots + x^{\lambda g^{(f-1)e}}$$

будемъ имѣть

$$\left.\begin{array}{l} \xi \equiv [f,\ 1] \equiv [f,\ g^{e}] \equiv [f,\ g^{2e}] \equiv \ldots\ldots \\ \xi_1 \equiv [f,\ g] \equiv [f,\ g^{e+1}] \equiv [f,\ g^{2e+1}] \equiv \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f \equiv [f,\ 0] \equiv [f,\ kn] \end{array}\right\} (U)$$

II) Сумма періодовъ

$$\xi + \xi_1 + \xi_2 + \ldots\ldots + \xi_{e-1} \equiv x + x^2 + \ldots\ldots + x^{n-1} (U).$$

Такъ какъ

$$U = \frac{x^n - 1}{x - 1},$$

то

$$\xi + \xi_1 + \xi_2 + \ldots\ldots + \xi_{e-1} \equiv -1\ (U).$$

III) Если f равно произведенію двухъ цѣлыхъ чиселъ b и c, то, очевидно, что каждый изъ періодовъ $(f,\ 1)$, $(f,\ g)$ .... содержащихъ f членовъ будетъ состоять изъ c періодовъ изъ которыхъ каждый содержитъ b членовъ.

$$[f,\ 1] = [b,\ 1] + [b,\ g^{e}] + [b,\ g^{2e}] + \ldots\ldots [b,\ g^{(c-1)e}]$$
$$[f,\ g] = [b,\ g] + [b,\ g^{e+1}] + [b,\ g^{2e+1}] + \ldots\ldots [b,\ g^{(c-1)e+1}]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

IV) Легко теперь доказать, что совокупность періодовъ не зависитъ отъ произвольно выбраннаго первообразнаго корня g. Дѣйствительно, пусть G будетъ какой нибудь другой первообразный корень числа n. Тогда, какъ извѣстно, будемъ имѣть

$$G \equiv g^{\mu}\ (\text{мод. } n),$$

гдѣ μ число взаимно простое съ $n - 1$.

Отсюда слѣдуетъ, что наименьшіе положительные вычеты по модулю n чиселъ

$$1,\ g^{e},\ g^{2e},\ \ldots\ldots\ g^{(f-1)e}$$

только порядкомъ будутъ отличаться отъ наименьшихъ положительныхъ вычетовъ чиселъ

$$1,\ G^{e},\ G^{2e},\ \ldots\ldots\ G^{(f-1)e}.$$

Точно также наименьшіе положительные вычеты по модулю n чиселъ

$$g^{\alpha},\ g^{e+\alpha},\ g^{2e+\alpha},\ \ldots\ldots\ g^{(f-1)e+\alpha}$$

будутъ только порядкомъ отличаться отъ наименьшихъ положительныхъ вычетовъ чиселъ

$$g^{\beta},\ g^{e+\beta},\ g^{2e+\beta},\ \ldots\ldots\ g^{(f-1)e+\beta},$$

если

$$g^{\alpha} \equiv G^{\beta}\ (\text{мод. } n).$$

Изъ всего этого заключаемъ, что если въ періодахъ

$$[f,\ 1],\ [f,\ g]\ \ldots\ldots\ [f,\ g^{e-1}]$$

измѣнить g на G, то измѣнится только ихъ порядокъ.

18.

Докажемъ теперь основную теорему относительно періодовъ.

Теорема. *Произведеніе двухъ періодовъ $[f,\ \lambda]$ и $[f,\ \mu]$, одинаковыхъ или различныхъ, сравнимо по функціи U съ линейною функціею періодовъ*

$$[f,\ 1],\ [f,\ g],\ \ldots\ldots\ [f,\ g^{e-1}],$$

коеффиціенты которой суть цѣлыя числа.

Доказат. Умножая каждый членъ періода $[f,\ \mu]$ на періодъ

$$[f,\ \lambda] \equiv [f,\ \lambda g^{e}] \equiv [f,\ \lambda g^{2e}] = \ldots\ldots\ (U)$$

получимъ

$$\left.\begin{aligned}[f,\ \lambda]\ [f,\ \mu] &\equiv [f,\ \lambda]\ x^{\mu} + [f,\ \lambda g^{e}]\ x^{\mu g^{e}} + \ldots\ldots + [f,\ \lambda g^{(f-1)e}]\ x^{\mu g^{(f-1)e}} \\ &\equiv x^{\lambda+\mu} + x^{\lambda g^{e}+\mu} + \ldots\ldots + x^{\lambda g^{(f-1)e}+\mu} \\ &+ x^{(\lambda+\mu)g^{e}} + x^{\lambda g^{2e}+\mu g^{e}} + \ldots\ldots + x^{\lambda g^{fe}+\mu g^{e}} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ x^{(\lambda+\mu)g^{(f-1)e}} + x^{\lambda g^{fe}+\mu g^{(f-1)e}} + \ldots\ldots + x^{\lambda g^{(2f-2)}+\mu g^{(f-1)e}}\end{aligned}\right\}\ (U)$$

и слѣдовательно

$$(1)\qquad [f,\ \lambda]\ [f,\ \mu] \equiv [f,\ \lambda+\mu] + [f,\ \lambda g^{e}+\mu] + \ldots\ldots [f,\ \lambda g^{(f-1)e}+\mu]\ \ (U)$$

Нѣкоторые изъ періодовъ

$$(f,\ \lambda+\mu),\ \ (f,\ \lambda g^{e}+\mu)\ \ldots\ldots$$

могутъ быть сравнимы между собою по функціи U; кромѣ того, если

$$\lambda g^{ke} + \mu \equiv 0\ \ (\text{мод. } n),$$

то

$$[f,\ \lambda g^{ke}+\mu] \equiv f\ (U).$$

И такъ вообще будемъ имѣть

$$(2)\qquad [f,\ \lambda]\ [f,\ \mu] \equiv af + b\xi + c\xi_{1} + \ldots\ldots,\ l\xi_{e-1}\ \ (U)$$

гдѣ $a,\ b,\ c\ \ldots\ldots$ — числа цѣлыя.

Изъ доказанной теоремы выводятся нѣкоторыя слѣдствія:

Умножая обѣ части сравненія (2) на $[f, \nu]$, мы получимъ при помощи формулы (1)

$$[f, \lambda]\ [f, \mu]\ [f, \nu] \equiv a'f + b'\xi + c'\xi_1 + \ldots\ldots + l'\xi_{e-1}\ (U).$$

Такъ что вообще если V есть цѣлая раціональная функція періодовъ

$$\xi,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots\ldots\ \xi_{e-1}$$

съ цѣлыми коэффиціентами, то можно принять

$$V \equiv A + B\xi + C\xi_1 + \ldots\ldots + L\xi_{e-1}\ (U);$$

гдѣ $A,\ B,\ C,\ \ldots\ldots\ L$ суть цѣлыя числа.

Давая въ сравненіи (2) числамъ λ и μ различныя значенія, мы получимъ слѣдующія сравненія:

$$(3)\qquad \left.\left|\begin{array}{l} \xi^2 \equiv sf + m\xi + m_1\xi_1 + m_2\xi_2 + \ldots + m_{e-1}\xi_{e-1} \\ \xi\xi_1 \equiv s^{(1)}f + m^{(1)}\xi + m_1^{(1)}\xi_1 + m_2^{(1)}\xi_2 + \ldots + m_{(e-1)}^{(1)}\xi_{e-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi\xi_{e-1} \equiv s^{(e-1)}f + m^{(e-1)}\xi + m_1^{(e-1)}\xi_1 + m_2^{(e-1)}\xi_2 + \ldots + m_{e-1}^{(e-1)}\xi_{e-1} \end{array}\right|\right\}\ (U)$$

гдѣ

$$\begin{array}{l} s,\ m,\ m_1,\ \ldots\ldots\ m_{e-1} \\ s^{(1)}\ m^{(1)},\ m_1^{(1)}\ \ldots\ldots\ m_{e-1}^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

суть цѣлыя числа равныя тѣмъ, которыя получаются въ соотвѣтствующихъ формулахъ для двучленныхъ уравненій.

Изъ этихъ сравненій можно вывести одно сравненіе

$$(4)\qquad \xi^e + p_1\xi^{e-1} + p_2\xi^{e-2} + \ldots\ldots + p_e \equiv 0\ (U),$$

гдѣ $p_1,\ p_2\ \ldots\ldots\ p_e$ числа цѣлыя.

Если мы это сравненіе обратимъ въ уравненіе, то оно будетъ совпадать совершенно съ тѣмъ, которое служитъ для опредѣленія f — членныхъ періодовъ составленныхъ изъ корней уравненія

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = 0.$$

Сравненію (4) удовлетворяютъ всѣ періоды

$$\xi,\ \xi_1,\ \ldots\ldots\ \xi_{e-1}.$$

Кромѣ того, поступая такъ какъ въ двучленныхъ уравненіяхъ, можно вывести сравненіе

$$N\xi_\lambda \equiv a^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)}\xi + a_2^{(\lambda)}\xi^2 + \ldots\ldots + a_{e-1}^{(\lambda)}\xi^{e-1}\ (U)$$
$$(\lambda = 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ e - 1)$$

гдѣ $N,\ a^{(\lambda)},\ a_1^{(\lambda)},\ \ldots\ldots\ a_{e-1}^{(\lambda)}$ суть числа цѣлыя; при этомъ N не равно нулю.

19.

Пусть p будетъ простое число принадлежащее къ показателю h по модулю n и f число дѣлящееся на h, такъ что

$$p^f \equiv 1 \text{ (мод. } n).$$

Мы разсмотримъ теперь свойства періодовъ относительно модуля p и нѣкоторой функціи P простой относительно этого модуля и дѣлящей функцію U. Очевидно, что всѣ предыдущія сравненія по функціи U остаются справедливыми, если ихъ взять по модулю p и функціи P, такъ какъ U дѣлится на P по модулю p.

Теорема. *Періоды* $\xi, \xi_1 \dots \xi_{e-1}$ *сравнимы съ нѣкоторыми цѣлыми числами по модулю* p *и функціи* P.

Доказат. Мы имѣемъ на основаніи только что сдѣланнаго замѣчанія

$$\xi \equiv x + x^{g^e} + x^{g^{2e}} + \dots + x^{g^{(f-1)e}} \text{(мод. } p, P)$$

Возвысивъ обѣ части этого сравненія въ степень p, получимъ при помощи леммы n^0 8

$$(1) \qquad \begin{aligned} \xi^p &\equiv (x + x^{g^e} + x^{g^{2e}} + \dots)^p \\ &\equiv x^p + x^{pg^e} + x^{pg^{2e}} + \dots \text{ (мод. } p, P). \end{aligned}$$

Съ другой стороны такъ какъ p удовлетворяетъ сравненію

$$p^f \equiv 1 \text{ (мод. } n)$$

и, слѣдовательно, сравненію

$$p \equiv g^{\lambda e} \text{ (мод. } n),$$

гдѣ λ нѣкоторое цѣлое число, то будемъ имѣть

$$x^p + x^{pg^e} + x^{pg^{2e}} + \dots + x^{pg^{(f-1)e}} \equiv \xi \; (U)$$

Откуда по (1) получаемъ

$$\xi^p \equiv \xi \text{ (мод. } p, P).$$

Итакъ разность $\xi^p - \xi$ сравнимая по модулю p съ произведеніемъ

$$\xi (\xi - 1) (\xi - 2) \dots (\xi - p + 1)$$

дѣлится на P по модулю p.

Такъ какъ P есть функція простая, то одинъ изъ множителей этого произведенія долженъ дѣлиться на P по модулю p — другими словами ξ сравнимо съ однимъ изъ чиселъ

$$0, 1, 2, \dots p - 1$$

по модулю p и функціи P.

Тоже самое можно сказать и относительно другихъ періодовъ

$$\xi_1, \xi_2 \dots \xi_{e-1}.$$

Пусть

$$u, u_1, u_2, \dots, u_{e-1}$$

будутъ тѣ числа, съ которыми сравнимы періоды

$$\xi,\ \xi_1,\ \xi_2\ \ldots\ldots\ \xi_{e-1}$$

по модулю p и функціи P. Эти числа могутъ быть найдены слѣдующимъ образомъ:

Мы имѣли сравненіе

$$\xi^e + p_1\xi^{e-1} + \ldots\ldots + p_e \equiv 0\ (U),$$

гдѣ $p_1,\ p_2 \ldots\ldots\ p_e$ суть цѣлыя числа опредѣляемыя изъ сравненій

$$\left.\begin{array}{l} -p_1 \equiv \xi + \xi_1 + \ldots\ldots + \xi_{e-1} \\ \ \ \ p_2 \equiv \xi\xi_1 + \xi\xi_2 + \ldots\ldots + \xi_{e-2}\xi_{e-1} \\ -p_3 \equiv \xi\xi_1\xi_2 + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\ (U)$$

Изъ этихъ сравненій выводятся такія:

$$\left.\begin{array}{l} -p_1 \equiv u + u_1 + \ldots\ldots + u_{e-1} \\ \ \ \ p_2 \equiv uu_1 + uu_2 + \ldots\ldots \\ -p_3 \equiv uu_1u_2 + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\ (\text{мод. } p)$$

Поэтому сравненію

$$u^e + p_1u^{e-1} + p_2u^{e-2} + \ldots\ldots + p_e \equiv 0\ (\text{мод. } p)$$

удовлетворяютъ всѣ числа

$$u,\ u_1,\ \ldots\ldots\ u_{e-1}$$

Это насъ приводитъ къ теоремѣ доказанной въ первый разъ Куммеромъ: [9]

Уравненіе степени e, при помощи котораго опредѣляются періоды состоящіе изъ f членовъ для корней уравненія

$$\frac{x^n-1}{x-1} = 0,$$

при n простомъ, имѣетъ всегда e корней равныхъ или неравныхъ, если его разсматривать какъ сравненіе по модулю p удовлетворяющему сравненію

$$p^f \equiv 1\ (\text{мод. } n)$$

Изъ сравненій (3) (n^0 18) выводятся такія:

$$\left.\begin{array}{l} u^2 \equiv sf + mu + m_1u_1 + \ldots\ldots + m_{e-1}u_{e-1} \\ uu_1 \equiv s^{(1)}f + m^{(1)}u + m_1{}^{(1)}u_1 + \ldots\ldots + m^{(1)}{}_{e-1}u_{e-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ uu_{e-1} \equiv s_{(e-1)}f + m^{(e-1)}u + m_1^{(e-1)}u_1 + \ldots\ldots + m_{e-1}{}^{(e-1}u_{e-1} \end{array}\right\}\ (\text{мод. } p)$$

Изъ опредѣленія чиселъ

$$u,\ u_1\ \ldots\ldots\ u_{e-1}$$

слѣдуетъ, что для всякой цѣлой функціи $\varphi(\xi, \xi_1 \ldots \xi_{e-1})$ періодовъ съ цѣлыми коеффиціентами имѣетъ мѣсто сравненіе

$$\varphi(\xi, \xi_1 \ldots\ldots \xi_{e-1}) \equiv \varphi(u, u_1 \ldots\ldots u_{e-1}) \text{ (мод. } p,\ P)$$

И такъ, *если*

$$\varphi\ (u, u_1, u_2, \ldots\ldots u_{e-1}) \equiv 0 \text{ (мод. } p)$$

то $\varphi\ (\xi, \xi_1 \ldots\ldots \xi_{e-1})$ *дѣлится на* P *по модулю* p.

20.

Теперь мы покажемъ какимъ образомъ опредѣляются простыя функціи, на которыя разлагается U по нѣкоторому простому модулю p, принадлежащему къ показателю h по модулю n.

Пусть

$$n - 1 = kh$$

и

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} [h,\ 1] = \eta \equiv x + x^{g^k} + x^{g^{2k}} + \ldots\ldots + x^{g^{(h-1)k}} \\ {[h,\ g]} = \eta_1 \equiv x^g + x^{g^{k+1}} + x^{g^{2k+1}} \ldots\ldots + x^{g^{(h-1)k+1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ {[h,\ g^{k-1}]} = \eta_{k-1} \equiv x^{g^{k-1}} + x^{g^{2k+1}} + \ldots\ldots + x^{g^{hk-1}} \end{array} \right\} \quad (U)$$

будутъ періоды содержащіе h членовъ.

Обозначимъ далѣе черезъ P одну изъ простыхъ функцій по модулю p дѣлящихъ по этому модулю функцію U. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что періоды

$$\eta,\ \eta_1 \ldots\ldots \eta_{k-1}$$

сравнимы по модулю p и функціи P съ числами

$$v,\ v_1 \ldots\ldots v_{k-1},$$

которыя всѣ опредѣляются изъ одного сравненія степени k

$$v^k + q_1 v^{k-1} + \ldots\ldots + q_k \equiv 0 \text{ (мод. } p),$$

гдѣ $q_1, q_2 \ldots\ldots q_k$ — цѣлыя числа.

Составимъ теперь сравненіе степени h по модулю p и функціи P, которому удовлетворяютъ функціи

$$x,\ x^{g^k},\ x^{g^{2k}},\ \ldots\ x^{g^{(h-1)k}}$$

Для вычисленія коеффиціентовъ этого сравненія представляющагося подъ видомъ

$$(2) \qquad (X - x)\,(X - x^{g^k})\,(X - x^{g^{2k}}) \ldots\ldots (X - x^{g^{(h-1)k}}) \equiv 0 \text{ (мод. } p,\ P)$$

можно найти сначала суммы одинаковыхъ степеней корней или величины сравнимыя съ ними по модулю p и функціи P; а потомъ по извѣстнымъ формуламъ Ньютона, которыя нужно обратить въ сравненія по модулю p и функціи P, вычислить уже коеффиціенты сравненія.

Мы имѣемъ по формуламъ (1)

$$\left.\begin{array}{l} x + x^{g^k} + x^{g^{2k}} + \ldots\ldots + x^{g^{(h-1)k}} \equiv [h,\ 1[\\ x^2 + x^{2g^k} + x^{2g^{2k}} + \ldots\ldots + x^{2g^{(h-1)k}} \equiv [h,\ 2] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^k + x^{kg^k} + \ldots\ldots + x^{kg^{(h-1)k}} \equiv [h,\ k] \end{array}\right\} (\text{мод. } p, P)$$

По доказанному выше каждый изъ періодовъ

$$[h,\ 1],\ [h,\ 2], \ldots\ldots [h,\ k]$$

сравнимъ по модулю p и функціи P съ однимъ изъ чиселъ

$$v, v_1 \ldots\ldots v_{k-1}$$

Такъ какъ P есть одна какая нибудь изъ простыхъ функцій дѣлящихъ U по модулю p, то число съ которымъ сравнимъ первый період $[h,\ 1]$ по модулю p и функціи P можетъ быть выбрано произвольно изъ ряда чиселъ

$$v, v_1 \ldots\ldots v_{k-1}$$

напр. v; затѣмъ уже число v_i соотвѣтствующее какому нибудь періоду $[h, g^i]$ опредѣляется на основаніи зависимости существующей между періодами: v_i будетъ находиться въ такой же зависимости съ v, въ какой періодъ $[h, g^i]$ находится съ періодомъ $[h,\ 1]$. Такимъ образомъ опредѣлятся суммы одинаковыхъ степеней корней сравненія (2). Это сравненіе будетъ имѣть видъ

$$X^h + l_1 X^{h-1} + l_2 X^{h-2} + \ldots\ldots + l_h \equiv 0 \ (\text{мод. } p, P),$$

гдѣ $l_1, l_2, \ldots\ldots l_h$ цѣлыя числа.

Замѣчая, что этому сравненію удовлетворяетъ $X = x$, мы видимъ, что функція

$$x^h + l_1 x^{h-1} + l_2 x^{h-2} + \ldots\ldots + l_h$$

дѣлится на P по модулю p. Такъ какъ P есть простая функція по модулю p степени h, то можно принять

$$P = x^h + l_1 x^{h-1} + l_2 x^{h-2} + \ldots\ldots + l_h$$

Замѣняя v другими величинами

$$v_1, v_2, \ldots\ldots v_{k-1}$$

мы получимъ другія функціи P.

21.

Примѣръ: Пусть

$$U = \frac{x^{13} - 1}{x - 1};$$

такъ что $n = 13$ и пусть $p = 29$

Это число принадлежитъ къ показателю 3 по модулю 13, слѣдовательно

$$h = 3, k = \frac{n-1}{h} = 4.$$

Одинъ изъ первообразныхъ корней 13 есть 2; слѣдоват. можно положить $g = 2$.

Періоды въ настоящемъ случаѣ будутъ

$$\left.\begin{array}{l} \eta = [3,\ 1] \equiv x + x^{16} + x^{256} \equiv x + x^3 + x^9 \\ \eta_1 = [3,\ 2] \equiv x^2 + x^{32} + x^{2.256} \equiv x^2 + x^6 + x^5 \\ \eta_2 = [3,\ 2^2] \equiv x^4 + x^{4.16} + x^{4.256} \equiv x^4 + x^{12} + x^{10} \\ \eta_3 = [3,\ 2^3] \equiv x^8 + x^{8.16} + x^{8.256} \equiv x^8 + x^{11} + x^7 \end{array}\right\} (U)$$

Изъ этихъ выраженій находимъ

$$(1) \qquad \left.\begin{array}{l} \eta^2 \equiv \eta_1 + 2\,\eta_2 \\ \eta\eta_1 \equiv \eta + \eta_1 + \eta_3 \\ \eta\eta_2 \equiv 3 + \eta_1 + \eta_3 \\ \eta\eta_3 \equiv \eta + \eta_2 + \eta_3 \end{array}\right\} (U)$$

Отсюда извѣстнымъ способомъ выводится сравненіе

$$X^4 + X^3 + 2\,X^2 - 4\,X + 3 \equiv 0\ (U),$$

которому удовлетворяютъ η, η_1, η_2, η_3.

По доказанному выше мы заключаемъ, что сравненіе

$$X^4 + X^3 + 2\,X^2 - 4\,X + 3 \equiv 0\ (\text{мод. } 29)$$

имѣетъ четыре корня

$$v,\ v_1,\ v_2,\ v_3,$$

соотвѣтствующіе періодамъ

$$\eta,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,$$

Эти корни суть:

$$-3,\ 5,\ 12,\ 14.$$

Если принять $v = -3$, то другіе корни найдутся изъ сравненій

$$\left.\begin{array}{l} v^2 \equiv v_1 + 2\,v_2 \\ vv_1 \equiv v + v_1 + v_3 \\ vv_2 \equiv 3 + v_1 + v_3 \\ vv_3 \equiv v + v_2 + v_3 \end{array}\right\} (\text{мод. } 29)$$

которыя получаются изъ (1).

При этомъ имѣемъ

$$v_1 = 14,\ v_2 = 12,\ v_3 = 5.$$

Теперь составимъ сравненіе по модулю 29 и функціи P (одной изъ простыхъ функцій дѣлящихъ $U = \frac{x^{13} - 1}{x - 1}$ по модулю p), которому удовлетворяютъ функціи

$$x,\ x^3,\ x^9$$

Мы имѣемъ

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x + x^3 + x^9 \equiv \eta \equiv -3 \\ x^2 + x^{2.3} + x^{2.9} \equiv \eta_1 \equiv \quad 14 \\ x^3 + x^{3.3} + x^{3.9} \equiv \eta \equiv -3 \end{array} \right\} (\text{мод. } 29, P)$$

Пусть

$$X^3 + a_1 X^2 + a_2 X + a_3 \equiv 0 \ (\text{мод. } 29, P)$$

будетъ искомое сравненіе

Изъ сравненій (2) по формуламъ Ньютона, получаемъ

$$a_1 \equiv 3, \ a_2 \equiv 12, \ a_3 \equiv -1 \ (\text{мод. } 29, P)$$

слѣдовательно одна изъ искомыхъ функцій P, которую мы обозначимъ черезъ P_0 будетъ

$$P_0 \equiv x^3 + 3x^2 + 12x - 1.$$

Такимъ же образомъ, полагая послѣдовательно

$$v = 5, \ v = 12, \ v = 14,$$

получимъ другія три функціи

$$P_1 = x^3 - 5x^2 + 14x - 1$$
$$P_2 = x^3 - 12x^2 - 3x - 1$$
$$P_3 = x^3 - 14x^2 + 5x - 1$$

ГЛАВА II.

О комплексныхъ единицахъ.

22.

Общія замѣчанія о комплексныхъ числахъ.

Пусть

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

будетъ неприводимое уравненіе n-й степени съ цѣлыми коеффиціентами т. е. другими словами пусть $F(x)$ не дѣлится ни на какую цѣлую функцію съ цѣлыми коеффиціентами степени низшей. Мы примемъ коеффиціентъ высшаго члена $F(x)$ равнымъ единицѣ.

Корни уравненія (1) будемъ обозначать черезъ

$$x_0, x_1, \ldots . x_{n-1}$$

Положимъ, что въ числѣ этихъ корней будетъ k вещественныхъ

$$x_0, x_1, \ldots . x_{k-1}$$

и $h-k$ паръ мнимыхъ сопряженныхъ

$$(x_k, x_h), (x_{k+1}, x_{h+1}), \ldots\ldots (x_{h-1}, x_{n-1});$$

такъ что

$$n = k + 2(h - k) = 2h - k.$$

Какой нибудь изъ корней

$$x_0, x_1, \ldots . x_{n-1}$$

будемъ обозначать черезъ x.

Цѣлымъ комплекснымъ числомъ зависящимъ отъ корней уравненія (1) мы будемъ называть всякую цѣлую функцію съ цѣлыми коеффиціентами одного изъ корней этого уравненія.

Понятно, что изъ всякой такой функціи можно исключить всѣ степени x, которыя будутъ не ниже n. Такъ что общій видъ цѣлаго комплекснаго числа φx будетъ

$$\varphi x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_{n-1} x^{n-1}, \tag{2}$$

гдѣ $a_0, a_1, \ldots . a_{n-1}$ означаютъ нѣкоторыя цѣлыя числа.

Существуетъ только одно представленіе цѣлаго комплекснаго числа $\varphi(x)$ подъ видомъ (2). Дѣйствительно, если мы положимъ еще

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1},$$

гдѣ $b_0, b_1 \ldots b_{n-1}$ числа цѣлыя, то будемъ имѣть

$$a_0 - b_0 + (a_1 - b_1) x + (a_2 - b_2) x^2 + \ldots + (a_{n-1} - b_{n-1}) x^{n-1} = 0.$$

Если это послѣднее равенство не обращается въ тождество, т. е. если хотя одна изъ разностей

$$a_0 - b_0, \ a_1 - b_1, \ldots a_{n-1} - b_{n-1}$$

не равна нулю, то мы будемъ имѣть уравненіе, степени ниже n, съ цѣлыми коеффиціентами, которому удовлетворяетъ одинъ изъ корней неприводимаго уравненія (1), а въ этомъ заключается противорѣчіе.

Замѣтимъ еще, что если цѣлое комплексное число $\varphi(x)$ при какомъ нибудь корнѣ уравненія (1) обращается въ раціональную дробь $\frac{p}{q}$, гдѣ p и q числа цѣлыя, то оно сохраняетъ это значеніе при всѣхъ корняхъ уравненія (1). Въ самомъ дѣлѣ уравненіе

$$q\varphi(x) - p = 0$$

съ цѣлыми коеффиціентами, имѣя одинъ общій корень съ уравненіемъ

$$F(x) = 0$$

должно удовлетворяться всѣми корнями этого уравненія.

Раціональнымъ комплекснымъ числомъ зависящимъ отъ корней уравненія (1) мы будемъ называть числа вида $\frac{\varphi x}{\psi x}$, гдѣ φx и ψx — цѣлыя комплексныя числа.

Примѣчаніе. Для краткости цѣлыя комплексныя числа мы будемъ иногда называть просто комплексными числами.

23.

Комплексныя числа

$$\varphi(x_0), \ \varphi(x_1), \ldots \varphi(x_{n-1})$$

называются *сопряженными*[10], а произведеніе ихъ

$$\varphi(x_0) \ \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_{n-1}),$$

которое какъ цѣлая раціональная симметрическая функція корней уравненія

$$F(x) = 0,$$

есть цѣлое число — *нормою*[11] комплекснаго числа $\varphi(x)$. Норму $\varphi(x)$ будемъ означать черезъ $N\varphi(x)$, такъ что

$$N\varphi(x_0) = N\varphi(x_1) = \ldots = N\varphi(x_{n-1}).$$

Норма произведенія двухъ комплексныхъ чиселъ φx и ψx или нѣсколькихъ, очевидно, равна произведенію нормъ множителей; такъ что

$$N(\varphi x \psi x) = N\varphi x \,.\, N\psi x$$[12].

Замѣтимъ еще, что норма φx есть результанта (Resultante) двухъ уравненій[13]

$$\varphi x = 0 \quad F(x) = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ извѣстно, что результанта этихъ двухъ уравненій равна

$$\varphi(x_0)\ \varphi(x_1) \ldots . \varphi(x_{n-1}).$$

Поэтому обозначая черезъ

$$y_1,\ y_2 \ldots . y_{n-1}$$

корни уравненія

$$\varphi x = a_0 + a_1 x + \ldots . + a_{n-1} x^{n-1} = 0,$$

мы можемъ норму φx выразить еще такимъ образомъ:

$$N\varphi x = a_{n-1}^n \,.\, F(y_1)\ F(y_2) \ldots . F(y_{n-1})$$[14].

Норма комплекснаго числа

$$\varphi x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots . + a_{n-1} x^{n-1},$$

если считать числа

$$a_0,\ a_1, \ldots . a_{n-1}$$

неопредѣленными, представляется формою n-й степени отъ этихъ чиселъ. Свойства такихъ формъ были изучаемы многими математиками, въ особенности Дирихле, Куммеромъ и Эрмитомъ.

Мы назовемъ комплексное число

$$\varphi(x_1)\ \varphi(x_2) \ldots . \varphi(x_{n-1}),$$

которое какъ цѣлая раціональная и симметрическая функція корней уравненія

$$\frac{F(x)}{x - x_0} = 0,$$

есть цѣлая раціональная функція x_0 съ цѣлыми коеффиціентами, *союзнымъ съ* $\varphi(x_0)$. Обозначая его черезъ $\Phi(x_0)$, получимъ

$$N\varphi(x_0) = \varphi(x_0)\ \Phi(x_0) = \varphi(x_1)\ \Phi(x_1) = \ldots ;\ N\Phi(x_0) = (N\varphi(x_0))^{n-1}.$$

24.

Что касается дѣйствій производимыхъ надъ комплексными числами, то мы замѣтимъ слѣдующее:

Сложеніе и вычитаніе этихъ чиселъ не представляетъ никакихъ затрудненій. При этихъ дѣйствіяхъ надобно поступать такъ, какъ будто бы x былъ количествомъ произвольнымъ; такъ что сумма двухъ комплексныхъ чиселъ

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots\ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

$$\psi(x) = b_0 + b_1 x + \ldots\ldots + b_{n-1} x^{n-1}$$

будетъ

$$a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)\, x + \ldots\ldots + (a_{n-1} + b_{n-1})\, x^{n-1}.$$

Чтобы составить произведеніе двухъ комплексныхъ чиселъ, мы сначала перемножаемъ ихъ считая x количествомъ произвольнымъ, а потомъ исключаемъ при помощи уравненія

$$F(x) = 0$$

всѣ степени, которыя не ниже n.

Далѣе мы будемъ говорить, что одно комплексное число $\varphi(x)$ дѣлится на другое $\psi(x)$, если можно найти третье комплексное число $\chi(x)$ такое, что

$$\varphi(x) = \psi(x)\ \chi(x).$$

Легко показать, что дѣленіе на комплексное число всегда приводится къ дѣленію на обыкновенное цѣлое число. Дѣйствительно, изъ равенства

$$\varphi(x) = \psi(x)\ \chi(x)$$

имѣемъ

$$\chi(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Положимъ, что $x = x_0$; въ такомъ случаѣ имѣемъ

$$\chi(x_0) = \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)} = \frac{\varphi(x_0)\,\psi(x_1)\,\psi(x_2)\ldots\psi(x_{n-1})}{N\psi(x_0)} = \frac{\varphi(x_0)\,\Psi(x_0)}{N\psi(x_0)},$$

гдѣ $\Psi(x_0)$ есть союзное число съ $\psi(x_0)$.

И такъ для составленія частнаго $\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}$ намъ нужно составить сначала произведеніе двухъ комплексныхъ чиселъ $\varphi(x_0)$ и $\Psi(x_0)$, а потомъ это комплексное число раздѣлить на $N\psi(x_0)$.

Если произведеніе $\varphi(x_0)\ \Psi(x_0)$ равно

$$c_0 + c_1 x_0 + c_2 x_0^2 + \ldots\ldots + c_{n-1} x_0^{n-1}$$

то для того, чтобы $\varphi(x_0)$ дѣлилось на $\psi(x_0)$ необходимо и достаточно, чтобы всѣ числа

$$c_0,\ c_1,\ \ldots\ldots\ c_{n-1}$$

дѣлились бы на $N\psi(x_0)$.

25.

О комплексныхъ единицахъ.

Комплексными единицами[15] называются такія комплексныя числа, у которыхъ норма равна ± 1. Такихъ чиселъ вообще безчисленное множество; онѣ играютъ существенную роль въ теоріи комплексныхъ чиселъ и ихъ нужно изучить прежде всего.

Мы докажемъ, что всѣ комплексныя числа, норма которыхъ равна -1, могутъ быть выражены черезъ одно изъ нихъ и черезъ числа, норма которыхъ равна 1. Пусть $f(x_0)$ и $f_1(x_0)$ будутъ два комплексныя числа, нормы которыхъ равны -1. Частное этихъ чиселъ

$$\varphi(x_0) = \frac{f_1(x_0)}{f(x_0)} = \frac{f_1(x_0)\, f(x_1)\, f(x_2) \dots (x_{n-1})}{Nf(x_0)} = -f_1(x_0)\, f(x_1)\, f(x_2) \dots . f(x_{n-1})$$

будетъ комплексная единица, норма кототорой равна положительной единицѣ. Дѣйствительно,

$$N\varphi(x_0) = \frac{Nf_1(x_0)}{Nf(x_0)} = 1 .$$

И такъ всѣ комплексныя единицы, норма которыхъ равна -1, представляются произведеніемъ одной изъ нихъ на различныя комплексныя единицы, норма которыхъ равна 1. Поэтому вопросъ о комплексныхъ единицахъ прежде всего сводится къ тому, чтобы найти всѣ рѣшенія уравненія

$$N\varphi x = 1 .$$

Такъ какъ это уравненіе имѣетъ вообще безконечное множество рѣшеній, то надобно найти самую простую общую формулу, въ которой заключаются всѣ эти рѣшенія. Этимъ вопросомъ мы теперь и займемся. Изъ рѣшенія его будетъ слѣдовать, что число всѣхъ комплексныхъ единицъ можетъ быть конечнымъ только въ томъ случаѣ, когда функція $F(x)$ будетъ вида

$$(1) \qquad x^2 + p_1 x + p_2$$

$$p_1^2 < 4p_2,$$

если не считать того случая, когда

$$F(x) = x + p_1 .$$

Въ этомъ послѣднемъ случаѣ комплексныя числа обращаются въ обыкновенныя цѣлыя числа.

Чтобы найти комплексныя единицы $\varphi(x)$ для случая

$$F(x) = x^2 + p_1 x + p_2 = 0,$$

$$p_1^2 < 4p_2,$$

положимъ

$$\varphi x = \xi_0 + \xi_1 x.$$

При этомъ находимъ

$$N\varphi x = \xi_0^2 - p_1 \xi_0 \xi_1 + p_2 \xi_1^2 ;$$

эта норма есть положительная квадратичная форма относительно ξ_0 и ξ_1. Изъ этого слѣдуетъ, что въ этомъ случаѣ нѣтъ комплексныхъ единицъ, норма которыхъ равна -1; достаточно разсмотрѣть только уравненіе

$$N\varphi x = \xi_0^2 - p_1 \xi_0 \xi_1 + p_2 \xi_1^2 = 1 ,$$

которое, какъ извѣстно, имѣетъ ограниченное число рѣшеній.

26.

Лемма. *Пусть*

$$\begin{aligned} u_1 &= a^1_1\xi_1 + a^1_2\xi_2 + \dots\dots + a^1_m\xi_m \\ u_2 &= a^2_1\xi_1 + a^2_2\xi_2 + \dots\dots + a^2_m\xi \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_m &= a^m_1\xi_1 + a^m_2\xi_2 + \dots\dots + a^m_m\xi_m \ (^*) \end{aligned}$$

будутъ линейныя функціи перемѣнныхъ

$$\xi_1, \xi_2 \dots\dots \xi_m$$

представляющихъ цѣлыя числа, и

$$\begin{matrix} a^1_1, & a^1_2 & \dots\dots & a^1_m \\ a^2_1, & a^2_2 & \dots\dots & a^2_m \\ \dots & & & \\ a^m_1, & a^m_2 & \dots\dots & a^m_m \end{matrix}$$

какія нибудь вещественныя количества. Если опредѣлитель

$$\Delta = \Sigma \pm a^1_1 a^2_2 \dots\dots a^m_m$$

этихъ функцій не равенъ нулю, то можетъ существовать только ограниченное число значеній

$$\xi_1, \xi_2, \dots\dots \xi_m$$

при которыхъ численныя величины

$$u_1, u_2, \dots\dots u_m$$

будутъ соотвѣтственно меньше нѣкоторыхъ данныхъ количествъ

$$R_1, R_2, \dots\dots R_m.$$

Доказат. Рѣшивъ уравненія

$$\begin{aligned} a^1_1\xi_1 + a^1_2\xi_2 + \dots\dots + a^1_m\xi_m &= u_1 \\ a^2_1\xi_1 + a^2_2\xi_2 + \dots\dots + a^2_m\xi_m &= u_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a^m_1\xi_1 + a^m_2\xi_2 + \dots\dots + a^m_m\xi_m &= u_m \end{aligned}$$

получимъ выраженія такого вида

$$\begin{aligned} \Delta\xi_1 &= A^1_1u_1 + A^1_2u_2 + \dots\dots + A^1_mu_m \\ \Delta\xi_2 &= A^2_1u_1 + A^2_2u_2 + \dots\dots + A^2_mu_m \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta\xi_m &= A^m_1u_1 + A^m_2u_2 + \dots\dots + A^m_mu \ . \end{aligned}$$

(*) Значки стоящія на верху a_1, $a_2 \dots\dots a_m$ не суть показатели.

Предполагая въ этихъ формулахъ, что

$$u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots u_m$$

заключаются соотвѣтственно между предѣлами

$$\pm R_1 \ \pm R_2 \ldots\ldots \pm R_m$$

мы найдемъ, что

$$\xi_1,\ \xi_2 \ldots\ldots \xi_m$$

также заключаются соотвѣтственно между конечными предѣлами

$$\begin{array}{l}
\pm\left[\left(\frac{A^1{}_1}{\Delta}\right) R_1 + \left(\frac{A^1{}_2}{\Delta}\right) R_2 + \ldots\ldots + \left(\frac{A^1{}_m}{\Delta}\right) R_m\right] \\
\pm\left[\left(\frac{A^2{}_1}{\Delta}\right) R_1 + \left(\frac{A^2{}_2}{\Delta}\right) R_2 + \ldots\ldots + \left(\frac{A^2{}_m}{\Delta}\right) R_m\right] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\pm\left[\left(\frac{A_1{}^m}{\Delta}\right) R_1 + \left(\frac{A_2{}^m}{\Delta}\right) R_2 + \ldots\ldots + \left(\frac{A_m{}^m}{\Delta}\right) R_m\right],
\end{array}$$

гдѣ

$$\left(\frac{A^1{}_1}{\Delta}\right), \left(\frac{A^1{}_2}{\Delta}\right), \ldots\ldots,$$

означаютъ численныя величины количествъ

$$\frac{A^1{}_1}{\Delta},\ \frac{A^1{}_2}{\Delta},\ \ldots\ldots,$$

и слѣдовательно, число значеній ξ_1, $\xi_2 \ldots\ldots \xi_m$, какъ чиселъ цѣлыхъ, ограничено.

Изъ этой леммы выводится такое предложеніе:

Можетъ существовать только ограниченное число цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ $\varphi(x)$, *для которыхъ модули всѣхъ сопряженныхъ выраженій*

$$\varphi(x_0),\ \varphi(x_1),\ \ldots\ldots \varphi(x_{n-1})$$

будутъ меньше нѣкотораго предѣла R.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$\varphi(x) = \xi_0 + \xi_1 x + \ldots\ldots + \xi_{n-1} x^{n-1}$$

будетъ одно изъ такихъ чиселъ.

Изъ этого предположенія слѣдуетъ во первыхъ, что численныя величины вещественныхъ количествъ

$$\varphi(x_0);\ \varphi(x_1)\ \ldots\ldots\ \varphi(x_{k-1})$$

меньше R; во вторыхъ если положимъ

$$\begin{array}{l}
x_k = \rho_k \ (\cos\theta_k + i\sin\theta_k) \\
x_{k+1} = \rho_{k+1}(\cos\theta_{k+1} + i\sin\theta_{k+1}) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{h-1} = \rho_{h-1}(\cos\theta_{h-1} + i\sin\theta_{h-1})
\end{array}$$

то найдемъ, что численныя величины каждаго изъ выраженій

$$\begin{array}{l}
\xi_0 + \rho_k \cos\theta_k \, \xi_1 + \rho_k^2 \cos 2\theta_k \, \xi_2 + \ldots, + \rho_k^{n-1} \cos(n-1)\,\theta_k \, \xi_{n-1} \\
\qquad \rho_k \sin\theta_k \, \xi_1 + \rho_k^2 \sin 2\theta_k \, \xi_2 + \ldots\ldots + \rho_k^{n-1} \sin(n-1)\,\theta_k \, \xi_{n-1} \\
\xi_0 + \rho_{k+1} \cos\theta_{k+1} \, \xi_1 + \rho_{k+1}^2 \cos 2\theta_{k+1} \, \xi_2 + \ldots\ldots + \rho_{k+1}^{n-1} \cos(n-1)\,\theta_{k+1} \, \xi_{n-1} \\
\qquad \rho_{k+1} \sin\theta_{k+1} \, \xi_1 + \rho_{k+1}^2 \sin 2\theta_{k+1} \, \xi_2 + \ldots\ldots + \rho_{k+1}^{n-1} \sin(n-1)\,\theta_{k+1} \, \xi_{n-1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

также меньше R. И такъ численныя величины всѣхъ линейныхъ функцій

$$\left\{\begin{array}{l}
u_0 = \xi_0 + x_0 \, \xi_1 + \ldots\ldots + x_0^{n-1} \xi_{n-1} \\
u_1 = \xi_0 + x_1 \, \xi_1 + \ldots\ldots + x_1^{n-1} \xi_{n-1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u_{k-1} = \xi_0 + x_{k-1} \xi_1 + \ldots\ldots + x_{k-1}^{n-1} \xi_{n-1} \\
u_k = \xi_0 + \rho_k \cos\theta_k \, \xi_1 + \ldots\ldots + \rho_k^{n-1} \cos(n-1)\,\theta_k \, \xi_{n-1} \\
u_{k+1} = \qquad \rho_k \sin\theta_k \, \xi_1 + \ldots\ldots + \rho_k^{n-1} \sin(n-1)\,\theta_k \, \xi_{n-1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u_{n-2} = \xi_0 + \rho_{h-1} \cos\theta_{h-1} \xi_1 + \ldots\ldots + \rho_{h-1}^{n-1} \cos(n-1)\,\theta_{h-1} \xi_{n-1} \\
u_{n-1} = \qquad \rho_{h-1} \sin\theta_{h-1} \xi_1 + \ldots\ldots + \rho_{h-1}^{n-1} \sin(n-1)\,\theta_{h-1} \xi_{n-1}
\end{array}\right. \tag{1}$$

будутъ меньше R. Опредѣлитель этихъ функцій не равенъ нулю; въ этомъ мы убѣдимся, если докажемъ, что система уравненій

$$\left\{\begin{array}{l}
u_0 = A_0, \; u_1 = A_1, \; \ldots\ldots \; u_{k-1} = A_{k-1} \\
u_k = a, \; u_{k+1} = b, \; u_{k+2} = a_1, \; u_{k+3} = b_1 \; \ldots\ldots
\end{array}\right. \tag{2}$$

гдѣ A_0, $A_1 \ldots\ldots A_{k-1}$, a, b, a_1, $b_1 \ldots\ldots$ какія нибудь данныя величины, имѣетъ только одно опредѣленное рѣшеніе.

Для этого положимъ

$$\begin{array}{l}
a + bi = A_k, \quad a - bi = A_h \\
a_1 + b_1 i = A_{k+1}, a_1 - b_1 i = A_{h+1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Рѣшеніе системы уравненій (2) выводится изъ рѣшенія слѣдующей:

$$\left\{\begin{array}{l}
\xi_0 + x_0 \, \xi_1 + \ldots\ldots + x_0^{n-1} \xi_{n-1} = A_0 \\
\xi_0 + x_1 \, \xi_1 + \ldots\ldots + x_1^{n-1} \xi_{n-1} = A_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\xi_0 + x_{k-1} \xi_1 + \ldots\ldots + x_{k-1}^{n-1} \xi_{n-1} = A_{k-1} \\
\xi_0 + x_k \, \xi_1 + \ldots\ldots + x_k^{n-1} \xi_{n-1} = A_k \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\xi_0 + x_{n-1} \xi_1 + \ldots\ldots + x_{n-1}^{n-1} \xi_{n-1} = A_{n-1}
\end{array}\right. \tag{3}$$

Эта послѣдняя система непремѣнно имѣетъ опредѣленное рѣшеніе, потому что опредѣлитель функцій стоящихъ въ лѣвой части уравненій (3) равенъ произведенію всѣхъ различныхъ разностей между корнями

$$(x_0 - x_1)\,(x_0 - x_2)\,(x_1 - x_2)\,\ldots.$$

и потому отличается отъ нуля. Поэтому прилагая доказанную въ этомъ n^0 лемму къ функціямъ (1) находимъ, что число системъ значеній

$$\xi_0,\ \xi_1 \ldots . \xi_{n-1},$$

а слѣдовательно, и число комплексныхъ чиселъ $\varphi(x)$ ограниченное.

27.

Лемма. *Пусть*

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1^1\xi_1 + a_2^1\xi_2 + \ldots . + a_m^1\xi_m + b^1 \\ a_1^2\xi_1 + a_2^2\xi_2 + \ldots . + a_m^2\xi_m + b^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^m\xi_1 + a_2^m\xi_2 + \ldots . + a_m^m\xi_m + b^m \end{array}\right.$$

будутъ линейныя функціи, которыхъ опредѣлитель

$$\Delta = \Sigma \pm a_1^1 a_2^2 \ldots . a_m^m$$

не равенъ нулю.

Тогда при всякихъ вещественныхъ количествахъ

$$b^1,\ b^2, \ldots . b^m$$

цѣлымъ числамъ

$$\xi_1,\ \xi_2 \ldots . \xi_m$$

можно дать такія значенія, что численныя величины всѣхъ линейныхъ функцій (1) будутъ меньше нѣкоторыхъ предѣловъ зависящихъ только отъ коеффиціентовъ

$$\begin{array}{l} a_1^1\ a_2^1 \ldots . a_m^1 \\ a_1^2\ a_2^2 \ldots . a_m^2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_1^m\ a_2^m \ldots . a_m^m. \end{array}$$

Доказат. Такъ какъ Δ не равенъ нулю, то всегда можно найти количества

$$\eta_1,\ \eta_2 \ldots . \eta_m$$

удовлетворяющія уравненіямъ

$$\begin{array}{l} a_1^1\eta_1 + a_2^1\eta_2 + \ldots . + a_m^1\eta_m + b^1 = 0 \\ a_1^2\eta_1 + a_2^2\eta_2 + \ldots . + a_m^2\eta_m + b^2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^m\eta_1 + a_2^m\eta_2 + \ldots . + a_m^m\eta_m + b^m = 0. \end{array}$$

При помощи этихъ уравненій функціи (1) могутъ быть представлены въ видѣ

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1^1(\xi_1-\eta_1)+a_2^1(\xi_2-\eta_2)+\ldots\ldots+a_m^1(\xi_m-\eta_m)\\ a_1^2(\xi_1-\eta_1)+a_2^2(\xi_2-\eta_2)+\ldots\ldots+a_m^2(\xi_m-\eta_m)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_1^m(\xi_1-\eta_1)+a_2^m(\xi_2-\eta_2)+\ldots\ldots+a_m^m(\xi_m-\eta_m)\end{array}\right.$$

Цѣлыя числа

$$\xi_1,\ \xi_2\ \ldots\ldots\ \xi_m$$

можно выбрать такимъ образомъ, чтобы численныя величины разностей

$$\xi_1-\eta_1,\ \xi_2-\eta_2,\ \ldots\ldots\ \xi_m-\eta_m$$

не превышали $\frac{1}{2}$.

Въ этомъ предположеніи численныя величины функцій (1) будутъ соотвѣтственно не больше

$$\frac{(a^1{}_1)+(a^1{}_2)+\ldots\ldots+(a^1{}_m)}{2}$$
$$\frac{(a^2{}_1)+(a^2{}_2)+\ldots\ldots+(a^2{}_m)}{2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{(a^m{}_1)+(a^m{}_2)+\ldots\ldots+(a^m{}_m)}{2}$$

гдѣ (a_1^1), (a_2^1) .... означаютъ численныя величины этихъ количествъ.

28.

Переходя теперь къ рѣшенію уравненія

$$(1)\qquad N\varphi x=1,$$

мы замѣтимъ, что если имѣются нѣсколько рѣшеній его

$$\varphi_1\,x,\ \varphi_2\,x\ \ldots\ldots$$

то

$$\varphi_1^{m_1}(x)\ \varphi_2^{m_2}(x)\ \ldots\ldots$$

гдѣ m_1, m_2, ... какія нибудь цѣлыя положительныя или отрицательныя числа будетъ также рѣшеніемъ уравненія (1).

Чтобы убѣдиться въ этомъ положимъ, что

$$\Phi_1(x),\ \Phi_2(x)\ \ldots\ldots$$

будутъ комплексныя числа соотвѣтственно союзныя съ

$$\varphi_1\,x,\ \varphi_2\,x,\ \ldots\ldots;$$

такъ что

$$\varphi_1 x \, \Phi_1 \, x = N\varphi_1 x = 1$$
$$\varphi_2 x \, \Phi_2 \, x = N\varphi_2 x = 1$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Изъ этихъ равенствъ видно, что цѣлыя отрицательныя степени чиселъ

$$\varphi_1 x, \; \varphi_2 x, \; . \; . \; . \; .$$

выразятся цѣлыми положительными степенями чиселъ

$$\Phi_1 x, \; \Phi_2 x \; . \; . \; . \; .$$

и слѣдовательно будутъ цѣлыми комплесными числами.

Поэтому и число

$$\varphi_1^{m_1} \, x \, \varphi_2^{m_2} \, x \; . \; . \; . \; .$$

при всякихъ цѣлыхъ положительныхъ или отрицательныхъ значеніяхъ m_1, m_2, ... будетъ цѣлымъ комплекснымъ числомъ.

Кромѣ того

$$N \left(\varphi_1^{m_1} \, (x) \, \varphi_2^{m_2} \, (x) \; . \; . \; . \; .\right) = (N \, \varphi_1 \, x)^{m_1} \, (N\varphi_2 \, x)^{m_2} \; . \; . \; . \; . = 1.$$

Мы остановимся сначала на особенныхъ рѣшеніяхъ уравненія

$$N\varepsilon \, (x) = 1$$

у которыхъ модули всѣхъ выраженій

$$\varepsilon(x_0), \; \varepsilon(x_1) \; . \; . \; . \; . \; \varepsilon(x_{n-1})$$

равны единицѣ [16].

Число такихъ рѣшеній

$$\varepsilon(x) = \xi_0 + \xi_1 \, x + \; . \; . \; . \; . + \xi_{n-1} \, x^{n-1},$$

на основаніи предложенія доказаннаго въ n^0 26, будетъ всегда ограниченное, такъ какъ численныя значенія ξ_0, ξ_1 . . . . ξ_{n-1} въ этомъ случаѣ не могутъ превзойти извѣстныхъ предѣловъ. Эти рѣшенія можно найти непосредственно давая числамъ ξ_0, ξ_1 . . . . ξ_{n-1} различныя значенія заключенныя въ соотвѣтствующихъ предѣлахъ. Замѣтимъ, что, если въ уравненія

$$F(x) = 0 \tag{2}$$

будетъ хотя одинъ вещественный корень, то особенныя рѣшенія $\varepsilon(x)$ уравненія

$$N \, \varepsilon(x) = 1$$

найдутся весьма просто. Полагая, что x означаетъ одинъ изъ вещественныхъ корней уравненія (2) мы получимъ по опредѣленію особенныхъ рѣшеній

$$\varepsilon(x) = \xi_0 + \xi_1 \, x + \xi_2 \, x^2 + \; . \; . \; . \; . + \xi_{n-1} \, x^{n-1} = \pm 1$$

Изъ этого равенства на основаніи неприводимости уравненія (2) имѣемъ

$$\xi_0 = \pm 1, \xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \ldots\ldots \xi_{n-1} = 0.$$

И такъ въ этомъ случаѣ особенныя рѣшенія сводятся къ $\pm$ 1. Замѣчая, что норма $\varepsilon(x)$ должна быть равна единицѣ, мы видимъ, что въ выраженіи ξ_0 надобно удержать верхній знакъ, если степень уравненія (2) нечетная, и можно оставить двойной знакъ въ противномъ случаѣ.

Если же въ уравненіи

$$F(x) = 0$$

нѣтъ вещественныхъ корней, то могутъ существовать особенныя рѣшенія уравненія (1) не равныя $\pm$ 1. Число этихъ рѣшеній, какъ мы видѣли выше, будетъ всегда ограниченное. Обозначимъ ихъ черезъ $\omega(x)$, $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ .... Возвышая одну изъ этихъ комплексныхъ единицъ $\omega(x)$ въ различныя степени, мы получимъ рядъ рѣшеній

(3) $$\omega(x), \omega^2(x), \omega^3(x) \ldots\ldots$$

уравненія (1). Всѣ эти рѣшенія будутъ особенныя, такъ какъ модули всѣхъ членовъ ряда (3) при всѣхъ корняхъ уравненія

$$F(x) = 0$$

равны единицѣ.

Такъ какъ число комплексныхъ единицъ такихъ какъ $\omega(x)$ ограниченное, то непремѣнно въ ряду количествъ

$$\omega(x), \omega^2(x), \omega^3(x) \ldots\ldots$$

будутъ равныя между собою. Пусть

$$\omega^m(x) = \omega^{m'}(x),$$

гдѣ $m > m'$; тогда

$$\omega^{m-m'}(x) = 1$$

И такъ всѣ такія единицы какъ $\omega(x)$ равны корнямъ нѣкоторой степени изъ единицы при всякомъ корнѣ уравненія

$$F(x) = 0.$$

29.

При дальнѣйшемъ изслѣдованіи уравненія

$$N\varphi x = 1$$

мы можемъ предполагать, что число h т. е. сумма числа вещественныхъ корней уравненія

$$F(x) = 0$$

и числа паръ мнимыхъ сопряженныхъ корней больше единицы. Въ самомъ дѣлѣ h можетъ быть равнымъ единицѣ только въ двухъ слѣдующихъ случаяхъ:

1) Когда уравненіе

$$F(x) = 0$$

первой степени и

2) Когда оно второй степени и имѣетъ два мнимыхъ корня.

Объ этихъ случаяхъ мы говорили въ n^0 25, и потому они могутъ быть исключены.

Предполагая h большимъ единицы, мы докажемъ слѣдующее предложеніе:

Можно всегда найти такое цѣлое число T не превосходящее извѣстнаго предѣла, что уравненіе

$$N\varphi(x) = T$$

будетъ имѣть безчисленное множество рѣшеній

$$\varphi(x) = \xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 \; . \; . \; . + \xi_{n-1} x^{n-1},$$

гдѣ $\varphi(x)$ есть цѣлое комплексное число, и, кромѣ того, можно изъ этихъ рѣшеній выбрать сколько угодно такихъ, что модули нѣкоторыхъ изъ выраженій

$$\varphi(x_0),\ \varphi(x_1),\ . \; . \; . \; . \; . \; . \ \varphi(x_{h-1})$$

произвольно выбранныхъ, но только не всѣхъ, будутъ меньше какого угодно даннаго числа ε, а модули остальныхъ больше какого угодно даннаго числа E.

Мы здѣсь не разсматриваемъ модулей выраженій

$$\varphi(x_h),\ \varphi(x_{h+1}) \; . \; . \; ., \ \varphi(x_{n-1}),$$

потому что они равны модулямъ сопряженныхъ съ ними.

Прежде чѣмъ перейдемъ къ доказательству этого предложенія условимся въ слѣдующихъ обозначеніяхъ:

Принимая во вниманіе, что

$$\varphi(x_0),\ \varphi(x_1),\ . \; . \; . \; . \ \varphi(x_{k-1})$$

суть вещественныя величины (n^0 22), мы назовемъ черезъ

$$u_0,\ u_1 \; . \; . \; . \; . \ u_{m-1}$$

численныя величины тѣхъ изъ нихъ, которыя мы хотимъ сдѣлать меньше ε и черезъ

$$v_0,\ v_1 \; . \; . \; . \; . \ v_{k-m-1}$$

численныя величины остальныхъ. Кромѣ того обозначимъ черезъ

$$u_m,\ u_{m+1},\ . \; . \; . \; . \ u_{l-1}$$

величины тѣхъ изъ выраженій

$$\varphi(x_k)\ \varphi(x_h),\ \varphi(x_{k+1})\ \varphi(x_{h+1}),\ . \; . \; . \; . \ \varphi(x_{h-1})\ \varphi(x_{n-1}),$$

представляющихъ соотвѣтственно квадраты модулей чиселъ

$$\varphi(x_k),\ \varphi(x_{k+1}) \; . \; . \; . \ \varphi(x_{h-1}),$$

которыя мы хотимъ сдѣлать меньше ε^2, а черезъ

$$v_{k-m},\ v_{k-m+1},\ \ldots\ldots\ v_{h-l-1}$$

величины остальныхъ. Принимая коэффиціенты

$$\xi_0,\ \xi_1\ \ldots\ldots\ \xi_{n-1}$$

комплекснаго числа $\varphi(x)$ за неопредѣленныя цѣлыя числа, замѣтимъ, что

$$u_0^2,\ u_1^2,\ \ldots\ldots\ \ u^2_{m-1}$$

суть квадраты линейныхъ однородныхъ функцій относительно

$$\xi_0,\ \xi_1,\ \ldots\ldots\ \xi_{n-1},$$

а каждая изъ величинъ

$$u_m,\ u_{m+1},\ \ldots\ldots\ u_{l-1}$$

представляетъ сумму двухъ квадратовъ, потому что

$$\varphi(x_k)\,\varphi(x_h) = \left(\frac{\varphi(x_k)+\varphi(x_h)}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varphi(x_k)-\varphi(x_h)}{2\sqrt{-1}}\right)^2$$

$$\varphi(x_{k+1})\,\varphi(x_{h+1}) = \left(\frac{\varphi(x_{k+1})+\varphi(x_{h+1})}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varphi(x_{k+1})-\varphi(x_{h+1})}{2\sqrt{-1}}\right)^2$$

. . . .

Такъ какъ x_k и x_h, x_{k+1} и x_{h+1} . . . . суть сопряженные корни, то очевидно, что величины

$$\frac{\varphi(x_k)+\varphi(x_h)}{2},\ \frac{\varphi(x_k)-\varphi(x_h)}{2\sqrt{-1}}\ \text{и т. д.}$$

суть вещественныя.

Доказательство теоремы основывается на свойствахъ положительной квадратичной формы

$$(1)\quad u_0^2+u_1^2+\ldots+u_{m-1}^2+2u_m+2u_{m+1}+\ldots+2u_{l-1}+A_0^2\xi_0^2+A_1^2\xi_1^2+\ldots+A_{n-1}^2\xi_{n-1}^2$$

содержащей неопредѣленные параметры

$$A_0,\ A_1,\ \ldots\ldots\ \ A_{n-1}.$$

Эту форму на основаніи предыдущаго замѣчанія можно разсматривать какъ состоящую изъ

$$m+2(l-m) = 2l-m$$

квадратовъ линейныхъ функцій

$$\xi_0,\ \xi_1\ \ldots\ \xi_{n-1}$$

и изъ формы

$$A_0\,\xi_0^2+A_1^2\,\xi_1^2+\ldots\ldots+A_{n-1}^2\,\xi_{n-1}^2.$$

Мы будемъ, для краткости, $2l-m$ обозначать черезъ s. Теперь составимъ опредѣлителя формы (1) или, правильнѣе, его численную величину D.

Такъ какъ коеффиціентъ при каждомъ изъ квадратовъ

$$\xi_0^2,\ \xi_1^2,\ .\ .\ .\ .\ .\ \xi_{n-1}^2$$

входитъ линейнымъ образомъ въ опредѣлителя формы, то мы получимъ для D такое выраженіе:

$$D = \sum A_0^{2\alpha_0}\ A_1^{2\alpha_1}\ .\ .\ .\ .\ A_{n-1}^{2\alpha_{n-1}}\ K_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots\alpha_{n-1}}$$

гдѣ $\alpha_0,\ \alpha_1, \ldots .\ \alpha_{n-1}$ равны нулю или единицѣ, а $K_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots\alpha_{n-1}}$ число независящее отъ $A_0,\ A_1 \ldots .$

Не трудно показать, что въ каждый изъ членовъ этой суммы должны входить по крайней мѣрѣ $n - s$ изъ величинъ

$$A_0,\ A_1,\ .\ .\ .\ .\ A_{n-1}$$

т. е. другими словами, въ каждомъ членѣ

$$A_0^{2\alpha_0} A_1^{2\alpha_1}\ .\ .\ .\ .\ A_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} K_{\alpha_0,\ \alpha_1,\ldots\alpha_{n-1}}$$

по крайней мѣрѣ $n - s$ показателей

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ .\ .\ .\ .\ \alpha_{n-1}$$

не равны нулю.

Дѣйствительно допустимъ, что есть хотя одинъ членъ содержащій меньшее число параметровъ

$$A_0,\ A_1\ .\ .\ .\ .\ A_{n-1};$$

напримѣръ f параметровъ, гдѣ $f < n - s$.

Тогда положивъ въ формѣ (1) всѣ параметры

$$A_0,\ A_1\ .\ .\ .\ .\ A_{n-1},$$

за исключеніемъ этихъ f, равными нулю, мы получили бы для D величину отличную отъ нуля, такъ какъ остальные f параметровъ суть неопредѣленныя величины; съ другой стороны форма (1) состояла бы тогда всего изъ $s + f\ (< n)$ квадратовъ линейныхъ функцій содержащихъ n перемѣнныхъ

$$\xi_0,\ \xi_1,\ .\ .\ .\ .\ \xi_{n-1}$$

Но извѣстно, что опредѣлитель квадратичной формы n перемѣнныхъ, состоящей меньше чѣмъ изъ n квадратовъ линейныхъ функцій равенъ нулю. И такъ мы приходимъ къ противорѣчію.

Положимъ

$$A_0 = A_1 = \ .\ .\ .\ . = A_{n-1} = \frac{1}{\Delta}.$$

На основаніи сдѣланнаго замѣчанія видно, что D приметъ видъ

$$\frac{Q}{\Delta^{2(n-s)}},$$

гдѣ Q можетъ содержать только нулевую и отрицательныя степени Δ, а потому при возрастающемъ до безконечности параметрѣ Δ не превзойдетъ нѣкотораго конечнаго числа B, которое въ каждомъ частномъ случаѣ можно вычислить.

Будемъ теперь дѣйствительно увеличивать параметръ Δ до безконечности, для каждаго значенія Δ находить величины

$$\xi_0,\ \xi_1\ .\ .\ .\ .\ \xi_{n-1}$$

дающія minimum формы (1) и составлять при помощи этихъ величинъ комплексныя числа $\varphi(x)$. Очевидно, что каждая изъ этихъ системъ значеній

$$\xi_0,\ \xi_1\ .\ .\ .\ .\ \xi_{n-1}$$

даетъ minimum формы (1) для Δ заключеннаго въ нѣкоторыхъ конечныхъ предѣлахъ. При переходѣ Δ черезъ одинъ изъ этихъ предѣловъ система чиселъ дающихъ minimum формы будетъ мѣняться[17].

Замѣчая, что по извѣстной теоремѣ[18], minimum формы (1) меньше $\mu\sqrt[n]{D}$, гдѣ μ есть коеффиціентъ зависящій отъ n и независящій отъ D, мы будемъ имѣть неравенство

$$(2)\qquad u_0^2 + u_1^2 + \ .\ .\ .\ + u_{m-1}^2 + 2u_m + 2u_{m+1} + \ .\ .\ .\ .\ + 2u_{l-1}$$

$$+ \frac{\xi^2{}_0 + \xi^2{}_1 + \ldots\ldots + \xi^2{}_{n-1}}{\Delta^2} < \mu\sqrt[n]{\frac{Q}{\Delta^{2(n-s)}}} < \mu\ \frac{\sqrt[n]{B}}{\sqrt[n]{\Delta^{2(n-s)}}}$$

Мы обозначимъ величину $\mu\sqrt[n]{B}$ черезъ b.

Изъ неравенства (2) получаемъ

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\xi_i^2}{\Delta^2} < \dfrac{b}{\sqrt[n]{\Delta^{2(n-s)}}} \\ \\ (\xi_i) < \sqrt{b}\,.\sqrt[n]{\Delta^s} \end{array}\right\}(i=0,1,\ldots.\ n-1).$$

и слѣдовательно

(3)

Знакомъ (ξ_i) мы, какъ всегда, обозначаемъ численную величину ξ_i.

Кромѣ того, изъ того же неравенства (2) находимъ

$$(4)\qquad u_0^2 + u_1^2 + \ .\ .\ .\ .\ + u_{m-1}^2 + 2u_m + \ .\ .\ .\ .\ + 2u_{l-1} < \frac{b}{\sqrt[n]{\Delta^{2(n-s)}}}.$$

Разбивая каждый изъ такихъ членовъ этой суммы какъ $2u_m$, $2u_{m+1}$ и т. д. на сумму двухъ $u_m + u_m$, $u_{m+1} + u_{m+1}$, . . . мы получимъ въ лѣвой части неравенства (4) сумму s положительныхъ количествъ. Замѣчая, что среднее геометрическое изъ нихъ не больше средняго ариѳметическаго, мы имѣемъ

$$\sqrt[s]{u_0^2u_1^2\ .\ .\ .\ .\ u_{l-1}^2} < \frac{b}{s}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{\Delta^{2(n-s)}}};$$

слѣдовательно

$$(5)\qquad u_0u_1\ .\ .\ .\ .\ u_{l-1} < \left(\frac{b}{s}\right)^{\frac{s}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{\Delta^{s(n-s)}}}.$$

Далѣе изъ неравенства (4) получаемъ

$$(6)\qquad u_i < \frac{\sqrt{b}}{\sqrt[n]{\Delta^{n-s}}}\,(i=0,\ 1,\ .\ .\ .\ .\ m-1)$$

$$(7) \qquad u_i < \frac{b}{\sqrt[n]{\Delta^{2(n-s)}}} \; (i = m, m+1, \ldots . l-1).$$

Переходя теперь къ изслѣдованію выраженій

$$v_0, v_1, \ldots . v_{h-l-1}$$

мы замѣтимъ, что

$$v_0, v_1 \ldots . v_{k-m-1}$$

суть линейныя однородныя функціи а

$$v_{k-m}, v_{k-m+1} \ldots . v_{h-l-1}$$

квадратичныя однородныя функціи перемѣнныхъ

$$\xi_0, \xi_1, \ldots . \xi_{k-1}.$$

Такъ какъ эти перемѣнныя ограничены неравенствами (3), то для величинъ $v_0, v_1 \ldots$ мы получимъ неравенства такого вида:

$$(8) \qquad v_i < \sqrt[n]{\Delta^s}\, c_i \; (i = 0, 1, \ldots . k-m-1)$$

$$(9) \qquad v_i < \sqrt[n]{\Delta^{2s}}\, c_i \; (i = k-m, k-m+1, \ldots . h-l-1),$$

гдѣ c_i нѣкоторыя конечныя величины независящія отъ Δ и зависящія только отъ коэффиціентовъ даннаго уравненія

$$F(x) = 0$$

и отъ величины b.

Изъ неравенствъ (5), (8) и (9) выводится такое

$$u_0 u_1 \ldots . u_{l-1}\, v_0 v_1 \ldots . v_{h-l-1} < \frac{\left(\frac{b}{s}\right)^{\frac{s}{2}} c_0 c_1 \ldots . c_{h-l-1}}{\sqrt[n]{\Delta^{s(n-s)}}} \sqrt[n]{\Delta^{s(k-m+2(h-k-l+m))}}$$

Но по нашимъ обозначеніямъ

$$2h - k = n$$
$$2l - m = s;$$

слѣдовательно

$$u_0 u_1 \ldots . u_{l-1}\, v_0 v_1 \ldots . v_{h-l-1} < \left(\frac{b}{s}\right)^{\frac{s}{2}} . c_0 c_1 \ldots . c_{h-l-1}.$$

Замѣчая, что

$$u_0 u_1 \ldots . u_{l-1}\, v_0 v_1 \ldots . v_{h-l-1}$$

есть численная величина нормы комплекснаго числа $\varphi(x)$, мы заключаемъ, что численныя величины нормъ комплексныхъ чиселъ, которыя получаются вычисленіемъ послѣдовательныхъ minima квадратичной формы всегда ниже извѣстнаго предѣла.

Изъ неравенствъ (6) и (7) видно, что количеству Δ можно дать такое большое значеніе, что каждое изъ количествъ

$$u_0, u_1 \ldots . u_{m-1}$$

будетъ меньше какого угодно даннаго числа ε.

Для этого стоитъ только положить

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt[n]{\Delta^{n-s}}} < \varepsilon.$$

При такомъ значенiи Δ каждое изъ количествъ

$$u_m,\ u_{m+1},\ \ldots\ldots u_{l-1}$$

какъ показываютъ неравенства (7) будетъ меньше ε^2; съ другой стороны, какъ мы сейчасъ увидимъ, можно взять Δ столь большимъ, что каждое изъ количествъ

$$v_0,\ v_1\ \ldots\ldots v_{k-m-1}$$

превзойдетъ произвольно данное число E; а каждое изъ количествъ

$$v_{k-m}\ \ldots\ldots v_{h-l-1}$$

превзойдетъ E^2. Дѣйствительно, положимъ напротивъ, что какое нибудь изъ чиселъ

$$v_0,\ v_1,\ \ldots\ldots v_{k-m-1}$$

напримѣръ v_g будетъ меньше E при всякомъ Δ. Тогда, взявъ неравенство

$$v_g < E$$

вмѣсто соотвѣтствующаго ему изъ неравенствъ (8) и соединяя его съ другими неравенствами, получимъ

$$v_0 v_1 \ldots\ldots v_{h-l-1} < \frac{c_0 c_1 \ldots\ldots c_{h-l-1} \sqrt[n]{\Delta^{s(n-s)}}}{c_g \sqrt[n]{\Delta^s}} E. \tag{10}$$

Подобнымъ же образомъ предположивъ, что одно изъ количествъ

$$v_{k-m}\ \ldots\ldots v_{h-l-1}$$

напримѣръ

$$v_f < E^2,$$

найдемъ

$$v_0 v_1 \ldots\ldots v_{h-l-1} < \frac{c_0 c_1 \ldots\ldots c_{h-l-1} \sqrt[n]{\Delta^{s(n-s)}} E^2}{c_f \sqrt[n]{\Delta^{2s}}}. \tag{11}$$

Соединивъ оба неравенства (10) и (11) съ неравенствомъ

$$u_0 u_1 \ldots\ldots u_{l-1} < \left(\frac{b}{s}\right)^{\frac{s}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{\Delta^{s(n-s)}}}$$

получимъ соотвѣтственно неравенства

$$(N\varphi x) < \left(\frac{b}{s}\right)^{\frac{s}{2}} \cdot \frac{c_0 c_1 \ldots\ldots c_{h-l-1} E}{c_g \sqrt[n]{\Delta^s}}$$

$$(N\varphi x) < \left(\frac{b}{s}\right)^{\frac{s}{2}} \cdot \frac{c_0 c_1 \ldots\ldots c_{h-l-1} E^2}{c_f \sqrt[n]{\Delta^{2s}}}.$$

При всякомъ данномъ числѣ E, какъ показываетъ каждое изъ этихъ неравенствъ, число Δ можно взять столь большимъ, что численная величина нормы $N\varphi x$ будетъ какъ угодно мала; такъ какъ $N\varphi x$ есть цѣлое число, то должны быть такія комплексныя числа, которыхъ норма равна нулю и, слѣдовательно, одно изъ чиселъ $\varphi(x_0)$, $\varphi(x_1)$, ... $\varphi(x_{n-1})$ равно нулю; а это противорѣчитъ тому, что уравненіе

$$F(x) = 0$$

есть неприводимое. Поэтому нельзя допустить, что при возрастающемъ до безконечности параметрѣ Δ одно изъ количествъ

$$v_0, v_1 \ldots . v_{k-m-1}$$

не превзойдетъ E или одно изъ количествъ

$$v_{k-m} \ldots . v_{k-l-1}$$

не превзойдетъ E^2.

Такъ какъ $(N\varphi x)$ для безконечно множества комплексныхъ чиселъ, вычисляемыхъ при помощи minima квадратичной формы (1) при параметрѣ Δ возрастающемъ до безконечности, не превосходитъ конечнаго предѣла, то отсюда и изъ предыдущихъ разсужденій слѣдуетъ, во первыхъ, что будетъ хотя одно число T численная величина котораго меньше этого предѣла и для котораго уравненіе

$$N\varphi(x) = T$$

имѣетъ безчисленное множество рѣшеній и, во вторыхъ, всегда можно найти такое рѣшеніе, что модули произвольно выбранныхъ изъ выраженій

$$\varphi(x_0), \varphi(x_1), \ldots . \varphi(x_{h-1})$$

будутъ меньше какого угодно даннаго числа ε, а модули остальныхъ больше E.

30.

Въ этомъ n^0 мы докажемъ слѣдующее предложеніе [19].

Всегда существуетъ рѣшеніе $\varphi(x)$ уравненія

$$N\varphi(x) = 1$$

такое, что модули нѣкоторыхъ сопряженныхъ выраженій

$$\varphi(x_0), \varphi(x_1), \ldots . \varphi(x_{h-1})$$

произвольно выбранныхъ, но только не всѣхъ, будутъ меньше единицы, а модули остальныхъ больше единицы.

По теоремѣ доказанной въ предыдущемъ n^0 заключаемъ, что изъ безконечнаго числа рѣшеній уравненія

$$N\varphi(x) = T$$

или, что все равно, уравненія

$$(1)\qquad u_0 u_1 \ldots . u_{l-1}\, v_0 v_1 \ldots . v_{h-l-1} = \pm T,$$

гдѣ $\pm T$ означаетъ численную величину T, можно выбрать сколько угодно такихъ

$$\begin{array}{l} u'_0,\ u'_1 \ \ldots .\ u'_{l-1},\ \ v'_0,\ v'_1 \ \ldots .\ v'_{h-l-1} \\ u''_0,\ u''_1 \ \ldots .\ u''_{l-1},\ \ v''_0,\ v''_1 \ \ldots .\ v''_{h-l-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u^{(i)}_0,\ u^{(i)}_1 \ \ldots .\ u^{(i)}_{l-1},\ \ v^{(i)}_0,\ v^{(i)}_1,\ \ldots .\ v^{(i)}_{h-l-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

для которыхъ будутъ имѣть мѣсто неравенства

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} u''_0 < u'_0,\ u''_1 \leqslant u'_1 \ \ldots .\ u''_{l-1} < u'_{l-1} \\ v''_0 > v'_0,\ v''_1 > v'_1 \ \ldots .\ v''_{l-1} > v'_{l-1} \end{array}\right.$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} u'''_0 < u''_0,\ u'''_1 < u''_1 \ \ldots .\ u'''_{l-1} < u''_{l-1} \\ v'''_0 > v''_0,\ v'''_1 > v''_1 \ \ldots .\ v'''_{l-1} > v''_{l-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Дѣйствительно, пусть

$$u'_0,\ u'_1,\ \ldots .\ u'_{l-1}\ v'_0,\ v'_1 \ \ldots .\ v'_{h-l-1}$$

будетъ одно изъ рѣшеній уравненія (1).

Такъ какъ для того же уравненія было доказано существованіе рѣшенія, въ которомъ

$$u_0,\ u_1,\ \ldots .\ u_{l-1}$$

будутъ какъ угодно малы, а

$$v_0,\ v_1 \ \ldots .\ v_{h-l-1}$$

какъ угодно велики, то изъ этого непосредственно слѣдуетъ существованіе рѣшенія, для котораго имѣютъ мѣсто неравенства (2). Совершенно также убѣдимся въ существованіи рѣшенія

$$u'''_0,\ u'''_1,\ \ldots .\ u'''_{l-1},\ v'''_0,\ v'''_1 \ \ldots .\ v'''_{h-l-1},$$

для котораго имѣютъ мѣсто неравенства (3) и т. д.

Такъ какъ число рѣшеній уравненія (1), удовлетворяющихъ неравенствамъ (2), (3) и т. д. безконечно большое, то можно всегда между ними найти два рѣшенія

$$\begin{array}{l} u^{(i)}_0,\ u^{(i)}_1 \ldots .\ u^{(i)}_{l-1},\ v^{(i)}_0,\ v^{(i)}_1 \ldots .\ v^{(i)}_{h-l-1} \\ u^{(j)}_0,\ u^{(j)}_1 \ldots .\ u^{(j)}_{l-1},\ v^{(j)}_0,\ v^{(j)}_1 \ldots .\ v^{(j)}_{h-l-1},\ j > i, \end{array}$$

соотвѣтствующія двумъ комплекснымъ числамъ φx и ψx, коэффиціенты которыхъ сравнимы между собою по модулю T. Дѣйствительно, каждое комплексное число φx сравнимо по модулю T съ числомъ

$$(4)\qquad r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + \ldots . + r_{n-1} x^{n-1},$$

гдѣ $r_0, r_1 \dots . r_{n-1}$ цѣлыя числа заключенныя между предѣлами 0 и $T-1$. Поэтому формула (4) содержитъ только ограниченное число различныхъ комплексныхъ чиселъ. И такъ если мы имѣемъ безконечное множество комплексныхъ чиселъ, то между ними всегда найдутся сравнимыя по модулю T. Такъ что, полагая

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots . + a_{n-1} x^{n-1}$$

$$\psi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots . + b_{n-1} x^{n-1},$$

получимъ

$$b_0 \equiv a_0, \; b_1 \equiv a_1 \dots . \; b_{n-1} \equiv a_{n-1} \; (\text{мод. } T);$$

слѣдовательно

$$\psi(x) = \varphi(x) + T\omega(x),$$

гдѣ $\omega(x)$ есть цѣлое комплексное число.

Пусть далѣе $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ будутъ числа союзныя съ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Мы получимъ

$$\varphi x \Phi(x) = T$$

$$\psi x \Psi(x) = T.$$

Составимъ теперь новое комплексное число

$$\psi(x) \; \Phi(x) = \varphi(x) \; \Phi(x) + T\omega(x) \; \Phi(x) = T(1 + \omega(x) \; \Phi(x)),$$

дѣлящееся на T, и положимъ

$$\varepsilon(x) = \frac{\psi(x) \, . \, \Phi(x)}{T};$$

$\varepsilon(x)$ есть цѣлое комплексное число, норма котораго равна единицѣ; дѣйствительно

$$N\psi x = T, \; N\Phi(x) = T^{n-1};$$

слѣдовательно

$$N\varepsilon(x) = \frac{N\psi x \, . \, N\Phi(x)}{T^n} = 1.$$

Кромѣ того, если x будетъ однимъ изъ тѣхъ корней

$$x_0, \; x_1 \dots . \; x_{h-1},$$

которымъ соотвѣтствуютъ количества

$$u_0^{(i)}, \; u_1^{(i)} \dots . \; u_{l-1}^{(i)} .$$

$$u_0^{(j)}, \; u_1^{(j)} \dots . \; u_{l-1}^{(j)}$$

то тогда, вслѣдствіе неравенствъ

$$\text{мод. } \psi x < \text{мод. } \varphi(x),$$

будемъ имѣть

$$\text{мод. } \varepsilon(x) < \text{мод. } \frac{\varphi x \, . \, \Phi(x)}{T} = 1.$$

Если же x есть одинъ изъ тѣхъ корней, которымъ соотвѣтствуютъ количества

$$v_0^{(i)}, \; v_1^{(i)} \dots . \; v_{h-l-1}^{(i)}$$

$$v_0^{(j)}, \; v_1^{(j)} \dots . \; v_{h-l-1}^{(j)}$$

то тогда, вслѣдствіе неравенствъ

$$v_0^{(j)} > v_0^{(i)},\ v_1^{(j)} > v_1^{(i)} \ldots\ldots v_{h-l-1}^{(j)} > v_{h-l-1}^{(i)}$$

$$\text{мод. } \psi(x) > \text{мод. } \varphi x,$$

будемъ имѣть

$$\text{мод. } \varepsilon(x) > \text{мод. } \frac{\varphi x \Phi(x)}{T} = 1.$$

И такъ $\varepsilon(x)$ есть то рѣшеніе, существованіе котораго мы хотѣли доказать.

31.

Изъ доказаннаго въ предыдущемъ n^0 слѣдуетъ, что уравненіе

$$N\varepsilon(x) = 1 \tag{1}$$

всегда имѣетъ рѣшенія.

Пусть

$$\varepsilon_1(x),\ \varepsilon_2(x),\ \ldots\ldots \varepsilon_\lambda(x)$$

будутъ какія нибудь λ рѣшеній уравненія (1).

Тогда комплексныя числа (n^0 28)

$$\varepsilon_1^{m_1}(x)\ \varepsilon_2^{m_2}(x) \ldots\ldots \varepsilon_\lambda^{m_\lambda}(x),$$

гдѣ $m_1, m_2, \ldots\ldots m_\lambda$ суть нѣкоторыя цѣлыя положительныя или отрицательныя числа будутъ также рѣшеніями уравненія (1).

Если для этихъ цѣлыхъ чиселъ

$$m_1, m_2, \ldots\ldots m_\lambda$$

невозможно подобрать такихъ значеній кромѣ

$$m_1 = 0,\ m_2 = 0,\ \ldots\ldots m_\lambda = 0,$$

чтобы

$$\varepsilon_1^{m_1}(x)\ \varepsilon_2^{m_2}(x) \ldots\ldots \varepsilon_\lambda^{m_\lambda}(x) = 1,$$

то мы, слѣдуя Дирихле, назовемъ систему рѣшеній

$$\varepsilon_1(x),\ \varepsilon_2(x),\ \ldots\ldots \varepsilon_\lambda(x)$$

системою λ *независимыхъ рѣшеній.*

Очевидно, что это опредѣленіе сводится къ тому, что выраженіе

$$\varepsilon_1^{m_1}(x)\ \varepsilon_2^{m_2}(x) \ldots\ldots \varepsilon_\lambda^{m_\lambda}(x)$$

въ случаѣ независимыхъ рѣшеній при различныхъ системахъ значеній

$$m_1, m_2, \ldots\ldots m_\lambda$$

имѣетъ непремѣнно различныя значенія.

Покажемъ теперь какимъ образомъ узнать, что данныя λ рѣшеній

$$\varepsilon_1(x),\ \varepsilon_2(x) \ldots\ldots \varepsilon_\lambda(x),$$

гдѣ $\lambda \leqq h - 1$, будутъ независимыя.

Положимъ, что при нѣкоторыхъ цѣлыхъ числахъ

$$m_1, m_2, \dots . m_\lambda$$

имѣетъ мѣсто равенство

$$(2) \qquad \varepsilon_1^{m_1}(x)\, \varepsilon_2^{m_2}(x) \dots . \varepsilon_\lambda^{m_\lambda}(x) = 1.$$

Вслѣдствіе неприводимости уравненія

$$F(x) = 0,$$

позволительно въ равенствѣ (2) замѣнить x послѣдовательно всѣми корнями

$$x_0, x_1, \dots . x_{n-1}.$$

Обозначимъ соотвѣтственно черезъ

$$e_{i,0}, e_{i,1}, \dots . e_{i,h-1},$$

модули выраженій $\varepsilon_i(x_0), \varepsilon_i(x_1), \dots . \varepsilon_i(x_{h-1}),$

Изъ сопряженности корней (n^0 22) заключаемъ, что модули

$$\varepsilon_i(x_h), \varepsilon_i(x_{h+1}), \dots . \varepsilon_i(x_{n-1})$$

соотвѣтственно равны

$$e_{i,k}, e_{i,k+1}, \dots . e_{i,h-1}$$

Замѣщая въ уравненіи (2) x корнями

$$x_0, x_1, \dots . x_{n-1},$$

и взявъ вмѣсто количествъ ихъ модули, получимъ

$$(3) \qquad \left.\begin{array}{l} e^{m_1}_{1,0}\; e^{m_2}_{2,0} \dots . e^{m_\lambda}_{\lambda,0} = 1 \\ e^{m_1}_{1,1}\; e^{m_2}_{2,1} \dots . e^{m_\lambda}_{\lambda,1} = 1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ e^{m_1}_{1,h-1}\, e^{m_2}_{2,h-1} \dots . e^{m_1}_{\lambda,h-1} = 1 \end{array}\right\}$$

Такъ какъ $\varepsilon_i(x)$ есть рѣшеніе уравненія

$$N\varepsilon_i(x) = 1,$$

то мы имѣемъ

$$e_{i,0} \cdot e_{i,1} \dots . e_{i,k-1}\, e^2_{i,k} \dots . e^2_{i,h-1} = 1$$

и, слѣдовательно,

$$e^{m_i}_{i,0}\; c^{m_i}_{i,1} \;.,..\; e^{m_i}_{i,k-1}\; e^{2m_i}_{i,k} \dots . e^{2m_i}_{i,h-1} = 1.$$

Давая значку i послѣдовательно значенія:

$$1, 2, \dots . \lambda$$

получимъ равенства

$$\begin{array}{l} e^{m_1}{}_{0,1}\, e^{m_1}{}_{1,1} \dots . e^{2m_1}{}_{1,h-1} = 1 \\ e^{m_2}{}_{2,0}\, e^{m_2}{}_{2,1} \dots . e^{2m_2}{}_{2,h-1} = 1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ e^{m_\lambda}{}_{\lambda,0}\, e^{m_\lambda}{}_{\lambda,1} \dots . e^{2m_\lambda}{}_{\lambda,h-1} = 1. \end{array}$$

Легко видѣть, что въ равенствахъ (3) послѣднее выводится изъ предшествующихъ и поэтому его можно отбросить; такъ что въ системѣ (3) останется $h - 1$ уравненій.

Обозначая черезъ $E_{i,k}$ натуральный логариѳмъ $e_{i,k}$, изъ равенствъ (3) находимъ

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} E_{1,0}m_1 + E_{2,0}m_2 + \dots\dots + E_{\lambda,0}m_\lambda = 0 \\ E_{1,1}m_1 + E_{2,1}m_2 + \dots\dots + E_{\lambda,1}m_\lambda = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Для того, чтобы эти уравненія допускали нѣкоторое рѣшеніе

$$m_1,\ m_2,\ \dots\dots\ m_\lambda$$

отличное отъ $m_1 = 0$, $m_2 = 0$, ... $m_\lambda = 0$, необходимо, чтобы всѣ опредѣлители порядка λ составленные изъ элементовъ

$$\begin{array}{l} E_{1,0},\ E_{2,0}\ \dots\dots\ E_{\lambda,0} \\ E_{1,1},\ E_{2,1}\ \dots\dots\ E_{\lambda,1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ E_{1,h-2}, E_{2,h-2} \dots\dots E_{\lambda,h-2} \end{array}$$

заключенныхъ въ какихъ нибудь λ изъ этихъ $h - 1$ строкъ были равны нулю.

И такъ если одинъ изъ такихъ опредѣлителей не равенъ нулю, то рѣшенія

$$\varepsilon_1(x),\ \varepsilon_2(x)\ \dots\dots\ \varepsilon_\lambda(x)$$

будутъ независимыя.

32.

Докажемъ теперь, что всегда можно подобрать систему независимыхъ рѣшеній

$$\varepsilon_1(x),\ \varepsilon_2(x),\ \dots\dots\ \varepsilon_{h-1}(x)$$

уравненія

$$N\varepsilon(x) = 1$$

состоящую изъ $h-1$ рѣшеній 2^0.

По доказанному въ предыдущемъ n^0 мы заключаемъ, что эти рѣшенія будутъ независимыя, если опредѣлитель

$$\Sigma \pm E_{1,0}\ E_{2,1}\ \dots\dots\ E_{h-1,h-2}$$

не будетъ равенъ нулю.

Чтобы выбрать такую систему единицъ поступаемъ слѣдующимъ образомъ:

Беремъ сначала одно какое нибудь рѣшеніе

$$\varepsilon_1(x)$$

уравненія

$$N\varepsilon(x) = 1$$

лишь бы оно не было особеннымъ т. е. модули всѣхъ выраженій

$$\varepsilon_1(x_0),\ \varepsilon_1(x_1)\ \dots\dots\ \varepsilon_1(x_{h-1})$$

не были равны единицѣ. Такое рѣшеніе всегда можно найти (n^0 30); кромѣ того можно принять что модуль $\varepsilon_1(x_0)$ т. е. $e_{1,0}$ по произволу больше или меньше единицы или, что тоже самое, $E_{1,0}$ по произволу больше нуля или меньше нуля.

Выбравъ рѣшеніе $\varepsilon_1(x)$, мы переходимъ ко второму рѣшенію $\varepsilon_2(x)$ и ищемъ его такъ, чтобы опредѣлитель

$$E_{1,0}\,E_{2,1} - E_{1,1}\,E_{2,0}$$

небылъ нулемъ. Въ такомъ случаѣ рѣшенія $\varepsilon_1(x)$ и $\varepsilon_2(x)$ будутъ независимыя (31).

Подобный выборъ $\varepsilon_2(x)$ всегда возможенъ. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $E_{1,0}$ не равно нулю, то стоитъ только выбрать $\varepsilon_2(x)$ такъ, чтобы $E_{2,1}$ имѣло такой же знакъ, какъ и $E_{1,0}$, а $E_{2,0}$ было знака противоположнаго съ $E_{1,1}$. Замѣчая, что каждое изъ количествъ $E_{2,0}$, $E_{2,1}$ больше нуля или меньше нуля, смотря потому будетъ ли каждое изъ соотвѣтствующихъ имъ количествъ $e_{2,0}$, $e_{2,1}$, больше или меньше единицы, мы видимъ, что всегда можно подобрать такое рѣшеніе $\varepsilon_2(x)$, въ которомъ $E_{2,0}$ и $E_{2,1}$ будутъ имѣть желаемые знаки (n^0 30).

Третье рѣшеніе $\varepsilon_3(x)$ мы ищемъ такъ, чтобы опредѣлитель

$$\begin{aligned}\Sigma \pm E_{1,0}\,E_{2,1}\,E_{3,2} = {} & (E_{1,0}\,E_{2,1} - E_{1,1}\,E_{2,0})\,E_{3,2} \\ & + (E_{1,2}\,E_{2,0} - E_{1,0}\,E_{2,2})\,E_{3,1} \\ & + (E_{1,1}\,E_{2,2} - E_{1,2}\,E_{2,1})\,E_{3,0}\end{aligned}$$

не былъ нулемъ. Такъ какъ опредѣлитель

$$E_{1,0}\,E_{2,1} - E_{1,1}\,E_{2,0}$$

не нуль, то для этого стоитъ только выбрать такое рѣшеніе $\varepsilon_3(x)$, чтобы

$$E_{3,0},\ E_{3,1},\ E_{3,2}$$

имѣли знаки соотвѣтственно одинаковые съ знаками количествъ

$$E_{1,1}\,E_{2,2} - E_{1,2}\,E_{2,1},\quad E_{1,2}\,E_{2,0} - E_{1,0}\,E_{2,2},\quad E_{1,0}\,E_{2,1} - E_{1,1}\,E_{2,0}.$$

Подобный выборъ всегда возможенъ, какъ это видно изъ n^0 30.

Продолжая поступать такимъ образомъ далѣе, составимъ систему

$$\varepsilon_1(x),\ \varepsilon_2(x)\ \ldots\ldots\ \varepsilon_{h-1}(x)$$

состоящую изъ $h-1$ независимыхъ рѣшеній.

33.

Пусть

$$\varepsilon_1(x),\ \varepsilon_2(x)\ \ldots\ldots\ \varepsilon_{h-1}(x)$$

будетъ система $h-1$ независимыхъ рѣшеній такая, что опредѣлитель

$$\Sigma \pm E_{1,0}\,E_{2,1}\ \ldots\ldots\ E_{h-1,h-2}$$

не нуль и $\varepsilon(x)$ еще какое нибудь рѣшеніе уравненія

$$N\varepsilon(x)=1.$$

Обозначимъ черезъ

$$e_0,\ e_1\ \ldots\ldots\ e_{h-1}$$

модули выраженій

$$\varepsilon(x_0),\ \varepsilon(x_1),\ \ldots\ldots\ \varepsilon(x_{h-1});$$

а черезъ

$$E_0,\ E_1,\ \ldots\ldots\ E_{h-1}$$

натуральные логариѳмы этихъ модулей. Не трудно убѣдиться, что всегда могутъ быть найдены вещественныя числа

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ldots\ \lambda_{h-1},$$

раціональныя или ирраціональныя, удовлетворяющія уравненіямъ:

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l}
e_0 = e_{1,0}^{\lambda_1}\ e_{2,0}^{\lambda_2}\ \ldots\ldots\ e_{h-1,0}^{\lambda_{h-1}}\\
e_1 = e_{1,1}^{\lambda_1}\ e_{2,1}^{\lambda_2}\ \ldots\ldots\ e_{h-1,1}^{h-1}\\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
e_{h-1} = e_{1,h-1}^{\lambda_1}\ e_{2,h-1}^{\lambda_2}\ \ldots\ldots\ e_{h-1,h-1}^{\lambda_{h-1}}.
\end{array}\right.$$

Такъ какъ мы имѣемъ

$$\begin{array}{l}
e_0\ \ e_1\ \ldots\ldots\ e_{k-1}\ \ e_k\ \ldots\ldots\ e_{h-1} = 1\\
e_{1,0}\ e_{1,1}\ \ldots\ldots\ e_{1,k-1}\ e_{1,k}^2\ \ldots\ldots\ e_{1,h-1}^2 = 1\\
e_{2,0}\ e_{2,1}\ \ldots\ldots\ e_{2,k-1}\ e_{2,k}^2\ \ldots,\ .\ e^2_{,h-1} = 1\\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .
\end{array}$$

то легко видѣть, что послѣднее изъ уравненій (1) есть слѣдствіе $h-1$ предыдущихъ, а потому его можно отбросить. Изъ остальныхъ $h-1$ уравненій находимъ

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l}
E_{1,0}\ \ \lambda_1 + E_{2,0}\ \ \lambda_2 + \ldots\ldots + E_{h-1,0}\ \ \lambda_{h-1} = E_0\\
E_{1,1}\ \ \lambda_1 + E_{2,1}\ \ \lambda_2 + \ldots\ldots + E_{h-1,1}\ \ \lambda_{h-1} = E_1\\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
E_{1,h-2}\,\lambda_1 + E_{2,h-2}\,\lambda_2 + \ldots\ldots + E_{h-1,h-2}\,\lambda_{h-1} = E_{h-2}
\end{array}\right.$$

Такъ какъ опредѣлитель

$$\Sigma \pm E_{1,0}\ E_{2,1}\ \ldots\ldots\ E_{h-1,h-2}$$

не нуль, то всегда можно найти числа

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ldots\ \lambda_{h-1}$$

удовлетворяющія уравненіямъ (2), и притомъ только одну систему такихъ чиселъ.

Составимъ теперь выраженіе

$$\varepsilon_1^{\lambda_1}(x)\,\varepsilon_2^{\lambda_2}(x)\,\ldots\,\varepsilon_{h-1}^{\lambda_{h-1}}(x).$$

Чтобы здѣсь не было неопредѣленности мы предположимъ слѣдующее:

Если при какомъ нибудь корнѣ x уравненія

$$F(x) = 0$$

$$\varepsilon_i(x) = R(\cos\varphi + i\,\sin\varphi),$$

гдѣ R — модуль, а φ — аргументъ, то мы примемъ

$$\varepsilon_i^{\lambda_i}(x) = R^{\lambda_i}(\cos\lambda_i\varphi + i\,\sin\lambda_i\varphi)$$

Изъ уравненій (1) видно, что модули выраженій

$$\varepsilon(x),\ \varepsilon_1^{\lambda_1}(x)\,\varepsilon_2^{\lambda_2}(x)\,\ldots\,\varepsilon_{h-1}^{\lambda_{h-1}}(x)$$

равны между собою при всѣхъ корняхъ уравненія

$$F(x) = 0.$$

Поэтому можно положить

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1^{\lambda_1}(x)\,\varepsilon_2^{\lambda_2}(x)\,\ldots\,\varepsilon_{h-1}^{\lambda_{h-1}}(x)\,e^{\theta i},$$

гдѣ θ вещественная величина, различная при различныхъ корняхъ x, а e — основаніе натуральныхъ логариѳмовъ.

Итакъ *всякое рѣшеніе уравненія*

$$N\varepsilon(x) = 1$$

можетъ быть представлено въ такомъ видѣ:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1^{\lambda_1}(x)\,\varepsilon_2^{\lambda}\,(x)\,\ldots\,\varepsilon_{h-1}^{\lambda_{h-1}}(x)\,e^{\theta i},$$

гдѣ $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{h-1}$ вещественныя величины, θ также вещественная величина и притомъ, вообще говоря, различная для различныхъ корней x.

Полагая

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= m_1 + \delta_1 \\ \lambda_2 &= m_2 + \delta_2 \\ &\ldots\ldots \\ \lambda_{h-1} &= m_{h-1} + \delta_{h-1}, \end{aligned}$$

гдѣ

$$m_1, m_2, \ldots m_{h-1}$$

цѣлыя числа и

$$\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_{h-1}$$

заключаются между 0 и 1, получимъ

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1^{m_1}(x)\,\varepsilon_2^{m_2}(x)\,\ldots\,\varepsilon_{h-1}^{m_{h-1}}(x)\,\varepsilon_1^{\delta_1}(x)\,\varepsilon_2^{\delta_2}(x)\,\ldots\,\varepsilon_{h-1}^{\delta_{h-1}}(x)\,e^{\theta i}$$

Отсюда видно что

$$\varepsilon_1^{\,1}(x)\,\varepsilon_2^{\,2}(x)\;\ldots\;\varepsilon_{h-1}^{\delta_{h-1}}(x)\,e^{\theta i} = \varepsilon(x)\,\varepsilon_1^{-m_1}(x)\,\varepsilon_2^{-m_2}(x)\;\ldots\;\varepsilon_{h-1}^{-m_{h-1}}(x)$$

есть также цѣлое комплексное число $\zeta(x)$, удовлетворяющее уравненію

$$N\zeta(x) = 1.$$

Такъ какъ

$$\delta_1,\ \delta_2,\ ,\ \ldots\ \delta_{h-1}$$

заключаются между 0 и 1, то при каждомъ корнѣ x модуль $\zeta(x)$ не превзойдетъ конечнаго предѣла, и слѣдовательно (n^0 26) число такихъ рѣшеній какъ $\zeta(x)$ ограниченное.

И такъ мы можемъ сказать, *что каждое рѣшеніе* $\varepsilon(x)$ *уравненія*

$$N\varepsilon(x) = 1$$

представляется подъ видомъ

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1^{m_1}(x)\,\varepsilon_2^{m_2}(x)\;\ldots\;\varepsilon_{h-1}^{m_{h-1}}(x)\,\zeta(x)$$

гдѣ $m_1,\ m_2,\ \ldots\ m_{h-1}$ *суть цѣлыя положительныя или отрицательныя числа, а* $\zeta(x)$ *есть одно изъ ограниченнаго числа рѣшеній вида*

$$\varepsilon_1^{\delta_1}(x)\,\varepsilon_2^{\delta_2}(x)\;\ldots\;\varepsilon_{h-1}^{\delta_{h-1}}(x)\,e^{\theta i}.$$

Возвышая комплексное число $\varepsilon(x)$ въ различныя степени получимъ рядъ рѣшеній

$$\varepsilon(x),\ \varepsilon^2(x)\ \ldots$$

уравненія

$$N\varepsilon(x) = 1$$

Такъ какъ число такихъ рѣшеній какъ $\zeta(x)$ ограниченное, то въ этомъ ряду всегда найдутся два члена

$$\varepsilon^r(x),\ \varepsilon^s(x)$$

такихъ, что.

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \varepsilon^r(x) &= \varepsilon_1^{p_1}(x)\,\varepsilon_2^{p_2}(x)\;\ldots\;\varepsilon_{h-1}^{p_{h-1}}(x)\,\zeta(x) \\ \varepsilon^s(x) &= \varepsilon_1^{q_1}(x)\,\varepsilon_2^{q_2}(x)\;\ldots,\;\varepsilon_1^{q_{h-1}}(x)\,\zeta(x) \end{aligned}\right.$$

гдѣ $\zeta(x)$ одно и тоже рѣшеніе, а

$$p_1,\ p_2,\ \ldots\ p_{h-1}$$
$$q_1,\ q_2,\ \ldots\ q_{h-1}$$

цѣлыя числа.

Пусть $s > r$; изъ равенствъ (3) выходитъ такое:

$$\varepsilon^{s-r}(x) = \varepsilon_1^{q_1-p_1}(x)\,\varepsilon_2^{q_2-p_2}(x)\;\ldots\;\varepsilon_{h-1}^{q_{h-1}-p_{h-1}}(x)$$

И такъ, *нѣкоторая цѣлая положительная степень каждаго рѣшенія* $\varepsilon(x)$ *представляется подъ видомъ*

$$\varepsilon_1^{m_1}(x)\,\varepsilon_2^{m_2}(x)\;\ldots\;\varepsilon_{h-1}^{m_{h-1}}(x),$$

гдѣ $m_1,\ m_2,\ \ldots\ m_{h-1}$ *суть цѣлыя числа.*

34.

Въ предыдущемъ n^0 мы разсматривали систему $h-1$ независимыхъ рѣшеній

$$\varepsilon_1(x),\ \varepsilon_2(x),\ \ldots\ ,\ \varepsilon_{h-1}(x),$$

для которой опредѣлитель

$$\Sigma \pm E_{1,0}\, E_{2,1}\ \ldots\ .\ E_{h-1,\ -2}$$

не равенъ нулю.

Теперь легко доказать, что это ограниченіе падаетъ само собой, т. е. какъ только подобный опредѣлитель равенъ нулю, рѣшенія ему соотвѣтствующія не будутъ независимыя. Дѣйствительно, разсмотримъ кромѣ прежней системы независимыхъ рѣшеній

$$\varepsilon_1(x),\ \varepsilon_2(x),\ \ldots\ .\ \varepsilon_{h-1}(x)$$

еще новую какую нибудь систему рѣшеній

$$\sigma_1(x),\ \sigma_2(x),\ \ldots\ .\ \sigma_{h-1}(x).$$

Изъ доказаннаго въ предыдущемъ n^0 мы заключаемъ, что всегда нѣкоторая цѣлая степень каждаго изъ рѣшеній

$$\sigma_1(x),\ \sigma_2(x),\ \ldots\ .\ \sigma_{h-1}(x)$$

можетъ быть выражена произведеніемъ цѣлыхъ степеней рѣшеній

$$\varepsilon_1(x),\ \varepsilon_2(x),\ \ldots\ .\ \varepsilon_{h-1}(x)$$

Поэтому можно положить

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \sigma_1^{n_1}(x) = \varepsilon_1^{m_{1,1}}(x)\ \ \varepsilon_2^{m_{2,1}}(x)\ \ldots\ .\ \varepsilon_{h-1}^{m_{h-1,1}}(x) \\ \sigma_2^{n_2}(x) = \varepsilon_1^{m_{1,2}}(x)\ \ \varepsilon_2^{m_{2,2}}(x)\ \ldots\ .\ \varepsilon_{h-1}^{m_{h-1,2}}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_{h-1}^{n_{h-1}}(x) = \varepsilon_1^{m_{1,h-1}}(x)\ \varepsilon_2^{m_{2,h-1}}(x)\ \ldots\ .\ \varepsilon_{h-1}^{m_{h-1,h-1}}(x), \end{array}\right.$$

гдѣ

$$\begin{array}{l} n_1,\ \ n_2,\ \ \ldots\ .\ n_{h-1} \\ m_{1,1},\ m_{2,1},\ \ldots\ .\ m_{h-1,1} \\ m_{1,2},\ m_{2,2},\ \ldots\ .\ m_{h-1,2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

нѣкоторыя цѣлыя числа

Обозначая черезъ

$$s_{i,0},\ s_{i,1},\ \ldots\ .\ s_{i,h-1}$$

соотвѣтственно модули выраженій

$$\sigma_i(x_0),\ \sigma_i(x_1),\ \ldots\ .\ \sigma_i(x_{h-1})$$

и черезъ

$$S_{i,0},\ S_{i,1},\ \ldots\ .\ S_{i,h-1}$$

натуральные логариѳмы этихъ модулей, найдемъ изъ уравненій (1) слѣдующія равенства:

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} n_1\ S_{1,0} = m_{1,1}\ E_{1,0} + m_{2,1}\ E_{2,0} + \ldots\ldots + m_{k-1,1}\ E_{h-1,0} \\ n_2\ S_{2,0} = m_{1,2}\ E_{1,0} + m_{2,2}\ E_{2,0} + \ldots\ldots + m_{h-1,2}\ E_{h-1,0} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n_{h-1} S_{h-1,0} = m_{1,h-1}\ E_{1,0} + m_{2,h-1}\ E_{2,0} + \ldots\ldots + m_{h-1,h-1}\ E_{k-1,0} \end{array}\right.$$

Подобныя же равенства получаются для

$$S_{1,1}, S_{2,1} \ldots\ldots S_{h-1,1}$$
$$S_{1,2}, S_{2,2}, \ldots\ldots S_{h-1,2};$$

стоитъ только въ равенствахъ (2) замѣнить значекъ 0 на 1, 2, ... Отсюда слѣдуетъ, что

$$n_1 . n_2, \ldots\ldots n_{h-1} \Sigma \pm S_{1,0} S_{2,1}, \ldots\ldots S_{h-1,h-2}$$
$$= \Sigma \pm m_{1,1}\ m_{2,2}, \ldots\ldots m_{h-1,h-1}\ \Sigma \pm E_{1,0}, E_{2,1}, \ldots\ E_{h-1,h-2}.$$

И такъ обозначая

$$\Sigma \pm E_{1,0}, E_{2,0}, \ldots\ldots E_{h-1,h-2}$$

черезъ D,

$$\Sigma \pm m_{1,1}, m_{2,2}, \ldots\ldots m_{h-1,h-1}$$

черезъ R и

$$\Sigma \pm S_{1,0}, S_{2,1}, \ldots\ldots S_{h-1,h-2}$$

черезъ Δ, получимъ

$$\Delta = \frac{RD}{n_1\, n_2 \ldots n_{h-1}}$$

Такъ какъ D не равно нулю, то Δ можетъ быть нулемъ только тогда, когда $R = 0$. Докажемъ, что въ этомъ случаѣ система рѣшеній

$$\sigma_1(x),\ \sigma_2(x),\ \ldots\ldots \sigma_{h-1}(x)$$

не можетъ быть независимою.

При $R = 0$, какъ извѣстно, можно найти цѣлыя числа

$$p_1 , p_2, \ldots\ldots p_{k-1},$$

изъ которыхъ по крайней мѣрѣ одно не равно нулю, удовлетворяющія уравненіямъ:

$$\begin{array}{l} m_{1,1}\, p_1 + m_{1,2}\, p_2 + \ldots\ldots + m_{1,h-1}\, p_{h-1} = 0 \\ m_{2,1}\, p_1 + m_{2,2}\, p_2 + \ldots\ldots + m_{2,h-1}\, p_{h-1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_{k-1,1}\, p_1 + m_{h-1,2}\, p_2 + \ldots\ldots + m_{h-1,h-1}\, p_{h-1} = 0 \end{array}$$

Умножая эти уравненія соотвѣтственно на

$$E_{1,0}, E_{2,0}, \ldots\ldots E_{h-1,0}$$

и складывая результаты, находимъ при помощи равенствъ (2)

$$n_1 p_1 S_{1,0} + n_2 p_2 S_{2,0} \dots + n_{h-1} p_{h-1} S_{h-1,0} = 0.$$

Такимъ же образомъ изъ другихъ равенствъ подобныхъ (2) получаемъ

$$n_1 p_1 S_{1,1} + n_2 p_2 S_{2,1} + \dots + n_{h-1} p_{h-1} S_{h-1,1} = 0$$
$$n_1 p_1 S_{1,2} + n_2 p_2 S_{2,2} + \dots + n_{h-1} p_{h-1} S_{h-1,2} = 0$$

. . . .

Эти равенства показываютъ, что модуль комплекснаго числа

$$\sigma_1^{n_1 p_1}(x)\, \sigma_2^{n_2 p_2}(x) \dots \sigma_{h-1}^{n_{h-1} p_{h-1}}(x)$$

при всѣхъ корняхъ

$$x_0,\ x_1, \dots x_{h-1}$$

равенъ единицѣ. Тоже самое. конечно, имѣетъ мѣсто и относительно корней

$$x_h,\ x_{h+1}, \dots x_{n-1}.$$

Съ другой стороны замѣчая, что

$$\sigma_1^{n_1 p_1}(x)\, \sigma_2^{n_2 p_2}(x) \dots \sigma_{h-1}^{n_{h-1} p_{h-1}}(x)$$

есть также одно изъ рѣшеній уравненія

$$N\varphi x = 1$$

мы видимъ, что это рѣшеніе принадлежитъ къ числу особенныхъ рѣшеній $\omega(x)$ (n^0 28). И такъ можно положить

$$\sigma_1^{n_1 p_1}(x)\, \sigma_2^{n_2 p_2}(x) \dots \sigma_{h-1}^{n_{h-1} p_{h-1}}(x) = \omega(x).$$

Такъ какъ каждое особенное рѣшеніе $\omega(x)$ удовлетворяетъ уравненію

$$\omega^m(x) = 1,$$

гдѣ m есть цѣлое число (n^0 28), то мы имѣемъ

$$\sigma_1^{mn_1 p_1}(x)\, \sigma_2^{mn_2 p_2}(x) \dots \sigma_{h-1}^{mn_{h-1} p_{h-1}}(x) = 1$$

и слѣдовательно рѣшенія

$$\sigma_1(x), \sigma_2(x) \dots \sigma_{h-1}(x)$$

не будутъ независимыя (n^0 31).

На основаніи сказаннаго въ этомъ n^0 мы заключаемъ, что предложенія, доказанныя въ n^0 33 имѣютъ мѣсто при всякой системѣ независимыхъ рѣшеній

$$\varepsilon_1(x),\ \varepsilon_2(x), \dots \varepsilon_{h-1}(x)$$

Къ этомъ предложеніямъ мы прибавимъ еще слѣдующее: *Не можетъ существовать системы состоящей больше чѣмъ изъ $h - 1$ независимыхъ рѣшеній*

$$\varepsilon_1(x),\ \varepsilon_2(x) \dots$$

Для того, чтобы убѣдиться въ этомъ, достаточно доказать, что какія угодно h рѣшеній

$$\varepsilon_1(x),\ \varepsilon_2(x)\ \ldots.\ \varepsilon_h(x)$$

не могутъ быть независимыми. Дѣйствительно, если мы допустимъ противное, то придемъ къ противорѣчію. Если всѣ рѣшенія

$$\varepsilon_1(x),\ \varepsilon_2(x)\ \ldots.\ \varepsilon_h(x)$$

будутъ независимыя, то это тѣмъ болѣе справедливо относительно $h-1$ рѣшеній

$$\varepsilon_1(x),\ \varepsilon_2(x)\ \ldots.\ \varepsilon_{h-1}(x).$$

Поэтому можно положить (n^0 33)

$$\varepsilon_h^{m_h}(x) = \varepsilon_1^{m_1}(x)\ \varepsilon_2^{m_2}(x)\ \ldots.\ \varepsilon_{h-1}^{m_{h-1}}(x),$$

гдѣ

$$m_1,\ m_2,\ \ldots.\ m_h$$

цѣлыя числа.

Отсюда находимъ

$$\varepsilon_1^{m_1}(x)\ \varepsilon_2^{m_2}(x)\ \ldots.\ \varepsilon_{h-1}^{m_{h-1}}(x)\ \varepsilon_h^{-m_h}(x) = 1;$$

и слѣдовательно, рѣшенія

$$\varepsilon_1(x),\ \varepsilon_2(x)\ \ldots.\ \varepsilon_h(x)$$

не будутъ независимыя (n^0 31).

35.

Въ предыдущемъ n^0 мы нашли зависимость

$$\Delta = \frac{RD}{n_1\, n_2 \ldots. n_{h-1}}$$

между опредѣлителями D и Δ, относящимися къ двумъ системамъ независимыхъ рѣшеній

$$\sigma_1(x),\ \sigma_2(x),\ \ldots.\ \sigma_{h-1}(x)$$
$$\varepsilon_1(x),\ \varepsilon_2(x),\ \ldots.\ \varepsilon_{h-1}(x).$$

Такъ какъ R не можетъ для независимыхъ рѣшеній равняться нулю, то наименьшее численное значеніе R будетъ равно единицѣ.

Замѣчая кромѣ того, что числа $n_1,\ n_2\ \ldots.\ n_{h-1}$ не превосходятъ извѣстныхъ предѣловъ, мы заключаемъ что Δ будетъ имѣть для одной или для многихъ системъ независимыхъ рѣшеній наименьшую величину. Такія системы независимыхъ рѣшеній мы будемъ называть *основными* [21].

Пусть $\sigma_1(x),\ \sigma_2(x),\ \ldots.\ \sigma_{h-1}(x)$ есть одна изъ такихъ системъ. Мы докажемъ, что въ такомъ случаѣ каждое рѣшеніе уравненія

$$N\varepsilon(x) = 1$$

выразится такъ:

$$\varepsilon(x) = \varpi(x)\ \sigma_1^{m_1}(x)\ \sigma_2^{m_2}(x)\ \ldots.\ \sigma_{h-1}^{m_{h-1}}(x)$$

гдѣ $\varpi(x)$ есть одно изъ особенныхъ рѣшеній, а

$$m_1,\ m_2,\ \ldots.\ m_{h-1}$$

цѣлыя числа.

Каждое рѣшеніе $\varepsilon(x)$ (n^0 33), какъ намъ извѣстно, выражается въ видѣ

$$\varepsilon(x) = \sigma_1^{m_1}(x)\, \sigma_2^{m_2}(x) \;.\;.\;.\;.\; \sigma_{h-1}^{m_{h-1}}(x)\, \eta(x)$$

гдѣ $m_1, m_2, \;.\;.\;.\;.$ суть цѣлыя числа, а $\eta(x)$ есть рѣшеніе того же уравненія, выражаемое формулою

$$\eta(x) = \sigma_1^{\delta_1}(x)\, \sigma_2^{\delta_2}(x) \;.\;.\;.\;.\; \sigma_{h-1}^{\delta_{h-1}}(x)\, e^{\theta i},$$

гдѣ δ_1, δ_2 . . . . заключаются между 0 и 1, а θ вещественная величина имѣющая для различныхъ корней x различныя значенія.

Всѣ величины δ_1, δ_2, ... δ_{h-1}, какъ мы сейчасъ увидимъ, должны быть равны нулю. Въ самомъ дѣлѣ, пусть напр. δ_1 неравно нулю.

Разсмотримъ систему рѣшеній

$$\eta(x),\ \sigma_2(x),\ \sigma_3(x) \;.\;.\;.\;.\; \sigma_{k-1}(x).$$

Пусть Δ' будетъ опредѣлитель для этой системы, составленный изъ логариѳмовъ, подобный опредѣлителю Δ и

$$S'_{1,0},\ S'_{1,1} \;.\;.\;.\;.\; S'_{1,h-1}$$

числа для $\eta(x)$ аналогичныя съ

$$S_{1,0},\ S_{1,1} \;.\;.\;.\;.\; S_{1,h-1},$$

для $\sigma_1(x)$.

Взявши модули $\eta(x)$ для корней $x_0, x_1, \;.\;.\;.\;.\; x_{h-1}$ и натуральные логариѳмы этихъ модулей, получимъ

$$\begin{aligned}
S'_{1,0} &= \delta_1\, S_{1,0} + \delta_2\, S_{2,0} + \;.\;.\;.\;.\; + \delta_{h-1}\, S_{h-1,0}\\
S'_{1,1} &= \delta_1\, S_{1,1} + \delta_2\, S_{2,1} + \;.\;.\;.\;.\; + \delta_{h-1}\, S_{h-1,1}\\
&\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\\
S'_{1,h-1} &= \delta_1\, S_{1,h-2} + \delta_2\, S_{2,h-2} + \;.\;.\;.\;.\; + \delta_{h-1}\, S_{h-1,h-2}
\end{aligned}$$

Отсюда находимъ

$$\Delta' = \Sigma \pm S'_{1,0}\, S_{2,1} \;.\;.\;.\;.\; S_{h-1,h-2} = \delta_1 \Sigma \pm S_{1,0}\, S_{2,1} \;.\;.\;.\;.\; S_{h-1,h-2} = \delta_1\, \Delta.$$

Такъ какъ δ меньше единицы, то, по численной величинѣ

$$\Delta' < \Delta,$$

а это противорѣчитъ тому, что Δ имѣетъ наименьшее значеніе. И такъ необходимо должно быть

$$\delta_1 = 0,\ \delta_2 = 0, \;.\;.\;.\;.\; \delta_{h-1} = 0$$

и, слѣдовательно, единица $\eta(x)$ сводится къ $e^{\theta i}$; поэтому модуль ея при всѣхъ корняхъ x равенъ единицѣ т. е. $\eta(x)$ есть одно изъ особенныхъ рѣшеній $\omega(x)$. Такимъ образомъ будемъ имѣть

$$\varepsilon(x) = \omega(x)\, \sigma_1^{m_1}(x)\, \sigma_2^{m_2}(x) \;.\;.\;.\;.\; \sigma_{k-1}^{m_{h-1}}(x)$$

36.

Въ этомъ n^0 мы покажемъ какимъ образомъ, имѣя одну основную систему рѣшеній

$$\sigma_1(x),\ \sigma_2(x) \ldots\ldots \sigma_{h-1}(x),$$

найти всѣ такія системы.

Пусть

$$\zeta_1(x),\ \zeta_2(x) \ldots\ldots \zeta_{h-1}(x)$$

будетъ какая нибудь система рѣшеній, которыя выражаются черезъ основныя такимъ образомъ:

$$(1) \quad \left.\begin{array}{l} \zeta_1(x) = \omega_1(x) \quad \sigma_1^{m_{1,1}}(x) \quad \sigma_2^{m_{2,1}}(x) \quad \ldots\ldots \sigma_{k-1}^{m_{h-1,1}}(x) \\ \zeta_2(x) = \omega_2(x) \quad \sigma_1^{m_{1,2}}(x) \quad \sigma_2^{m_{2,2}}(x) \quad \ldots\ldots \sigma_{h-1}^{m_{h-1,2}}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \zeta_{h-1}(x) = \omega_{h-1}(x) \ \sigma_1^{m_{1,h-1}}(x) \ \sigma_2^{m_{2,h-1}}(x) \ldots\ldots \sigma_{h-1}^{m_{h-1,h-1}}(x) \end{array}\right\}$$

гдѣ $\omega_1(x),\ \omega_2(x) \ldots\ldots \omega_{h..1}(x)$ означаютъ особенныя рѣшенія.

Изъ уравненій (1), принимая во вниманіе, что модули

$$\omega_1(x),\ \omega_2(x) \ldots\ldots \omega_{h-1}(x)$$

при всѣхъ корняхъ x равны единицѣ, мы выведемъ точно также какъ въ n^0 34. что опредѣлитель Δ' составленный изъ логариѳмовъ модулей рѣшеній

$$\zeta_1(x),\ \zeta_2(x) \ldots\ldots \zeta_{h-1}(x)$$

равенъ опредѣлителю Δ изъ логариѳмовъ модулей

$$\sigma_1(x),\ \sigma_2(x) \ldots\ldots \sigma_{h-1}(x)$$

умноженному на опредѣлителя R, составленнаго изъ чиселъ

$$\begin{array}{l} m_{1,1},\ m_{2,1} \ldots\ldots m_{h-1,1} \\ m_{1,2},\ m_{2,2} \ldots\ldots m_{h-1,2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Незачѣмъ разсматривать случая, когда $R = 0$; такъ что численное значеніе R или равно единицѣ или больше ея. Если $(R) > 1$, то $(\Delta') > (\Delta)$ и новая система рѣшеній

$$\zeta_1(x),\ \zeta_2(x) \ldots\ldots \zeta_{h-1}(x)$$

не будетъ основная. Если же $(\Delta) = \Delta$, то получается основная система рѣшеній. И такъ основныхъ рѣшеній безчисленное множество, и всѣ онѣ получаются по формуламъ (1), если $R = \pm 1$.

37.

Переходимъ теперь къ рѣшенію уравненія

$$(1) \qquad N\varphi(x) = r,$$

гдѣ r какое нибудь данное цѣлое число [22].

Мы покажемъ, что всѣ рѣшенія этого уравненія представляются подъ видомъ

$$\varphi(x) = \varphi_p(x)\ \varepsilon(x),$$

гдѣ $\varphi_p(x)$ есть одно изъ ограниченнаго числа рѣшеній

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots .\ \varphi_d(x)$$

того же уравненія, которыя можно найти непосредственно конечнымъ числомъ дѣйствій, а $\varepsilon(x)$ есть одно изъ рѣшеній уравненія

$$N\varepsilon(x) = 1.$$

Очевидно изъ этого, что если есть одно рѣшеніе уравненія (1), то ихъ вообще будетъ безчисленное множество.

Пусть $\varphi(x)$ будетъ одно изъ рѣшеній уравненія (1). Положимъ

$$(2) \qquad \psi(x) = \varphi(x)\ \varepsilon(x),$$

гдѣ $\varepsilon(x)$ будетъ какое нибудь рѣшеніе уравненія

$$(3) \qquad N\varepsilon(x) = 1.$$

Тогда, очевидно, ψx будетъ цѣлымъ комплекснымъ числомъ, норма котораго равна r, слѣдоват. $\psi(x)$ есть также одно изъ рѣшеній уравненія (1).

Пусть

$$(4) \qquad \varepsilon(x) = \varepsilon_1^{m_1}(x)\ \varepsilon_2^{m_2}(x)\ \ldots .\ \varepsilon_{h-1}^{m_{h-1}}(x)$$

гдѣ

$$\varepsilon_1(x),\ \varepsilon_2(x),\ \ldots .\ \varepsilon_{h-1}(x)$$

представляютъ какую нибудь систему независимыхъ рѣшеній уравненія (3) а $m_1, m_2 \ldots . m_{h-1}$ цѣлыя числа. Мы увидимъ, что числа $m_1,\ m_2,\ \ldots .\ m_{h-1}$ можно выбрать такимъ образомъ, что ψx будетъ однимъ изъ рѣшеній уравненія (1), которыя можно найти непосредственно. Обозначимъ соотвѣтственно черезъ

$$e_{\mu,\nu},\ \alpha_\nu,\ \beta_\nu$$

модули величинъ

$$\varepsilon_\mu(x_\nu),\ \varphi(x_\nu),\ \psi(x_\nu)$$

и черезъ

$$E_{\mu,\nu},\ A_\nu,\ B_\nu$$

натуральные логариѳмы этихъ модулей.

По уравненію (4) имѣемъ

$$\beta_\mu = \alpha_\mu\ e_{1,\mu}^{m_1}\ e_{2,\mu}^{m_2}\ \ldots .\ e_{h-1,\mu}^{m_{h-1}}$$

Взявши логариѳмы обѣихъ частей этого равенства и положивъ μ послѣдовательно равнымъ

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots .\ h-2,$$

получимъ

$$\begin{array}{l} E_{1,0}\ m_1 + E_{2,0}\ m_2 + \ldots . + E_{h-1,0}\ m_{h-1} + A_0 = B_0 \\ E_{1,1}\ m_1 + E_{2,1}\ m_2 + \ldots . + E_{h-1,1}\ m_{h-1} + A_1 = B_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Такъ какъ

$$\varepsilon_1(x),\ \varepsilon_2(x)\ .\ .\ .\ .\ \varepsilon_{h-1}(x)$$

представляютъ независимую систему рѣшеній, то опредѣлитель

$$\Sigma \pm E_{1,0}\, E_{2,1}\ .\ .\ .\ .\ E_{k-1,k-2}$$

не равенъ нулю. Поэтому (n^0 27) цѣлыя числа $m_1, m_2\ .\ .\ .\ .\ m_{h-1}$ могутъ быть опредѣлены такимъ образомъ, что величины

$$B_0,\ B_1\ .\ .\ .\ .\ B_{k-2}$$

не превзойдутъ извѣстныхъ предѣловъ. Кромѣ того изъ уравненія

$$N\psi(x) = r$$

находимъ

$$B_0 + B_1 + .\ .\ .\ .\ B_{k-1} + 2\, B_k + 2\, B_{k+1} + .\ .\ .\ .\ 2\, B_{h-1} = \log(r)$$

Изъ этого равенства видно, что и B_{h-1} не превзойдетъ извѣстнаго предѣла. Переходя отъ логариѳмовъ къ числамъ увидимъ, что каждое изъ чиселъ

$$\beta_0,\ \beta_1\ .\ .\ .\ .\ \beta_{k-1}$$

будетъ ограниченное.

Такія рѣшенія уравненія

$$N\psi(x) = r$$

можно найти непосредственно подставляя на мѣсто ψx различныя комплексныя числа.

Пусть

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x).\ .\ .\ .\ .\ \varphi_d(x)$$

будутъ всѣ тѣ изъ этихъ рѣшеній, между которыми нѣтъ двухъ $\varphi_\lambda(x)$ и $\varphi_\mu(x)$ находящихся въ зависимости

$$\varphi_\lambda(x) = \varphi_\mu(x)\, \sigma(x),$$

гдѣ $\sigma(x)$ есть одно изъ рѣшеній уравненія

$$N\sigma(x) = 1.$$

Изъ сказаннаго мы заключаемъ, что при каждомъ рѣшеніи уравненія

$$N\varphi x = r$$

можно подобрать одно изъ рѣшеній $\varepsilon(x)$ уравненія

$$N\varepsilon(x) = 1$$

такъ, что произведеніе

$$\varepsilon(x)\varphi x$$

будетъ равно одному изъ комплексныхъ чиселъ

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ .\ .\ .\ .\ \varphi_d(x)$$

умноженному на комплексное число $\sigma(x)$, норма котораго равна единицѣ. Итакъ можно положить

$$\varphi(x)\ \varepsilon(x) = \varphi_\nu(x)\ \sigma(x);$$

слѣдовательно

$$\varphi(x) = \varphi_\nu(x)\,\frac{\sigma(x)}{\varepsilon(x)}$$

Отношеніе $\frac{\sigma(x)}{\varepsilon(x)}$ есть также цѣлое комплексное число, норма котораго равна единицѣ.

Примѣчаніе. Если $r = -1$, то число d можетъ быть только равно единицѣ, потому что, какъ мы видѣли выше (n^0 25), всѣ рѣшенія уравненія

$$N\varphi x = -1$$

выражаются черезъ одно изъ нихъ и черезъ рѣшенія уравненія

$$N\varepsilon(x) = 1.$$

38.

На основаніи теоремъ доказанныхъ въ предыдущихъ nn^0 мы можемъ составить общее выраженіе для комплексныхъ единицъ. Пусть

$$\sigma_1(x),\ \sigma_2(x),\ \ldots\ldots\ \sigma_{k-1}(x)$$

будетъ одна изъ системъ основныхъ рѣшеній уравненія

$$N\varphi(x) = 1$$

и $\bar{\omega}(x)$—какое нибудь особенное рѣшеніе того же уравненія. Кромѣ того пусть $\eta(x)$ будетъ одно изъ рѣшеній уравненія

$$N\varphi x = -1,$$

если оно имѣетъ рѣшенія.

Въ такомъ случаѣ общій видъ комплексныхъ единицъ будетъ

$$\varepsilon(x) = \omega(x)\ \eta^f(x)\ \sigma_1^{m_1}(x)\ \sigma_2^{m_2}(x)\ \ldots\ldots\ \sigma_{k-1}^{m_{k-1}}(x), \tag{1}$$

гдѣ $\omega(x)$ надобно замѣнить всѣми особенными рѣшеніями; $f = 0$ или 1, смотря потому будетъ ли норма $\varepsilon(x)$ равна 1 или -1, и m_1, m_2 .... m_{k-1} всевозможныя цѣлыя положительныя или отрицательныя числа.

Можно показать, что *каждая комплексная единица можетъ быть только однимъ образомъ представлена подъ видомъ* (1).

Допустимъ напротивъ, что кромѣ (1) имѣемъ еще

$$\varepsilon(x) = \omega_1(x)\ \eta^{f_1}(x)\ \sigma_1^{m'_1}(x)\ \sigma_2^{m'_2}(x)\ \ldots\ldots\ \sigma_{h-1}^{m'_{h-1}}(x)$$

Во первыхъ, очевидно, что $f_1 = f$.

Поэтому получимъ

$$\omega(x)\ \sigma^{m_1}(x)\ \sigma^{m_2}(x),\ \ldots\ldots\ \sigma_{k-1}^{m_{k-1}}(x) = \varpi_1(x)\ \sigma_1^{m'_1}(x)\ \sigma_2^{m'_2}(x)\ \ldots\ldots\ \sigma_{h-1}^{m'_{h-1}}(x)$$

Откуда, полагая

$$m_1 - m'_1 = \mu_1,\ m_2 - m'_2 = \mu_2,\ \ldots\ m_{k-1} - m'_{k-1} = \mu_{k-1},$$

находимъ

$$\sigma_1^{\mu_1}(x)\ \sigma_2^{\mu_2}(x)\ \ldots\ \sigma_{k-1}^{\mu_{k-1}}(x) = \frac{\varpi_1(x)}{\varpi(x)}. \tag{3}$$

отношеніе

$$\frac{\varpi_1(x)}{\varpi(x)}$$

есть цѣлое комплексное число, представляющее также особенное рѣшеніе уравненія

$$N\varphi x = 1.$$

Поэтому всегда найдется цѣлое число p такое, что

$$\frac{\varpi^{p}{}_1(x)}{\varpi^{\lambda}(x)} = 1$$

и слѣдовательно

$$\sigma_1^{p\mu_1}(x)\ \sigma_2^{p\mu_2}(x)\ \ldots\ \sigma_{k-1}^{p\mu_{k-1}}(x) = 1, \tag{4}$$

Такъ какъ

$$\sigma_1(x),\ \sigma_2(x)\ \ldots\ \sigma_{k-1}$$

суть независимыя рѣшенія, то уравненію (4) можно только удовлетворить полагая

$$\mu_1 = 0,\ \mu_2 = 0\ \ldots\ \mu_{k-1} = 0$$

т. е.

$$m_1 = m'_1,\ m_2 = m'_2,\ \ldots\ m_{k-1} = m'_{k-1}$$

и слѣдовательно (ур. 3)

$$\varpi_1(x) = \varpi(x).$$

ГЛАВА III.

Идеальные множители комплексныхъ чиселъ.

39.

Извѣстно, что Гауссъ ввелъ въ теорію чиселъ комплексныя цѣлыя числа вида $a + bi$ т. е. комплексныя числа зависящія отъ корней уравненія

$$x^2 + 1 = 0.$$

Это нововведеніе по своей важности составило эпоху въ этой наукѣ, такъ какъ оно дало ключь къ рѣшенію многихъ весьма трудныхъ вопросовъ и повело въ свою очередь къ новымъ замѣчательнымъ обобщеніямъ [23].

Чтобы убѣдиться въ важномъ значеніи этихъ комплексныхъ чиселъ достаточно припомнить себѣ ту роль, которую онѣ играютъ въ теоріи биквадратичныхъ вычетовъ, въ теоріи дѣленія круга и лемнискаты и т. д. [24].

При выводѣ основныхъ теоремъ, относящихся къ числамъ $a + bi$, Гауссъ употребилъ тотъ же путь, которому слѣдуютъ въ подобномъ случаѣ и для обыкновенныхъ цѣлыхъ чиселъ. Исходною точкою этого пути служитъ алгориѳмъ, при помощи котораго находится общій наибольшій дѣлитель цѣлыхъ чиселъ. Изъ этого алгориѳма выводятся различныя теоремы относительно дѣлимости произведенія нѣсколькихъ чиселъ на простое число, существованіе одного разложенія числа на простые множители и т. д.

Комплексныя числа вида $a + bi$ содержащія въ себѣ какъ частный случай обыкновенныя цѣлыя числа, сами содержатся какъ частный случай въ комплексныхъ числахъ зависящихъ отъ корней какого нибудь неприводимаго уравненія съ цѣлыми коэффиціентами. Теорія такихъ комплексныхъ чиселъ до сихъ поръ не была составлена, можетъ быть потому, что не являлось вопроса къ которому она могла быть приложена.

Послѣ того какъ теорія комплексныхъ чиселъ $a + bi$ была составлена, математики начали заниматься комплексными числами, зависящими отъ корней какой нибудь степени изъ единицы. Они пришли къ этимъ числамъ изучая подробно теорію дѣленія круга на равныя части. Кромѣ того можно указать на двѣ причины заставившія математиковъ обратиться къ этому роду комплексныхъ чиселъ: съ одной стороны они надѣялись доказать при помощи этихъ чиселъ послѣднюю теорему Фермата, состоящую, какъ извѣстно, въ томъ что уравненіе

$$x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda,$$

гдѣ λ цѣлое число большее 2, не можетъ быть рѣшено въ цѣлыхъ числахъ.

Это доказательство и дѣйствительно было найдено для безконечнаго множества чиселъ λ; съ другой стороны изученіе этихъ чиселъ было необходимо для доказательства законовъ взаимности относительно вычетовъ высшихъ степеней, которые очень интересовали многихъ математиковъ.

Первыя попытки установить теорію комплексныхъ чиселъ зависящихъ отъ корней какой нибудь степени изъ единицы, впрочемъ не совсѣмъ удачныя, были сдѣланы Ляме и Коши. Неудача ихъ произошла отъ того, что они думали положить въ основаніе этой теоріи алгориѳмъ подобный тому, которымъ находится общій наибольшій дѣлитель двухъ обыкновенныхъ цѣлыхъ чиселъ и вывести отсюда тѣже слѣдствія, которыя вывелъ Гауссъ для чиселъ вида $a + bi$.

Подобный алгориѳмъ дѣйствительно можетъ быть примѣненъ къ нѣкоторымъ комплекснымъ числамъ напр. зависящимъ отъ корня уравненія

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = 0;$$

Но вообще онъ непримѣнимъ.

Куммеръ первый составилъ теорію комплексныхъ чиселъ зависящихъ отъ корней какой нибудь степени изъ единицы. При помощи такъ называемыхъ идеальныхъ множителей комплексныхъ чиселъ онъ довелъ эту теорію до желаемаго совершенства и получилъ замѣчательные результаты, приложивъ ее къ доказательству послѣдней теоремы Фермата и законовъ взаимности для вычетовъ высшихъ степеней. Въ послѣдствіи Кронеккеръ показалъ приложеніе этой теоріи Куммера къ алгебрѣ [28]. Посредствомъ ея онъ доказалъ, что всѣ абелевы уравненія, коэффиціенты которыхъ суть обыкновенныя цѣлыя числа или числа вида $a + bi$ суть уравненія дѣленія круга или лемнискаты.

Кромѣ комплексныхъ чиселъ зависящихъ прямо отъ корней изъ единицы, были также изучены и нѣкоторыя другія комплексныя чиела, имѣющія связь съ теоріею дѣленія круга. Мы укажемъ здѣсь напр. на работу Эйзенштейна «Ueber die Formen 3-ten grades mit 3 Variabeln welche der Kreistheilung ihre Entstehung verdanken» [29].

Я изложу въ этой главѣ теорію комплексныхъ чиселъ зависящихъ отъ корней неприводимаго уравненія

$$F(x) = 0$$

какой нибудь степени съ цѣлыми коэффиціентами, изъ которыхъ коэффиціентъ высшаго члена равенъ единицѣ. Для того, чтобы не усложнить теоріи исключены нѣкоторыя особенныя функціи $F(x)$, которыя мы характеризуемъ ниже, и которыя мы разсмотримъ при другомъ случаѣ. Эта теорія основана на свойствахъ функціональныхъ сравненій, изложенныхъ въ первой главѣ этого сочиненія. Въ слѣдующей главѣ я покажу приложеніе комплексныхъ чиселъ къ одному вопросу интегральнаго исчисленія, который и побудилъ меня заняться теоріею этихъ чиселъ.

40.

Приступая къ теоріи комплексныхъ чиселъ, зависящихъ отъ корней неприводимаго уравненія

$$(1) \qquad F(x) = 0$$

степени n, котораго корни суть

$$x_0,\ x_1,\ \ldots\ .\ x_{n-1},$$

мы займемся сначала рѣшеніемъ слѣдующаго вопроса:

Узнать дѣлится ли произведеніе нѣсколькихъ данныхъ комплексныхъ чиселъ

$$\varphi(x_0),\ \psi(x_0),\ \chi(x_0)\ \ldots\ .$$

на обыкновенное простое число p или нѣтъ. Положимъ что ни одно изъ данныхъ чиселъ не дѣлится на p; несмотря на это, произведеніе ихъ

$$\varphi(x_0)\ \psi(x_0)\ \chi(x_0)\ \ldots\ .,$$

если его развернуть по степенямъ x_0 и исключить всѣ степени x_0, которыя не ниже n, на основаніи уравненія (1), можетъ дѣлиться на p. Вслѣдствіе этого свойства комплексныхъ чиселъ нельзя на эти числа прямо распространить извѣстныхъ теоремъ о дѣлимости произведенія обыкновенныхъ цѣлыхъ чиселъ на простое число.

Для достиженія этого надобно сдѣлать нѣкоторыя допущенія, о которыхъ мы будемъ говорить въ слѣдующихъ пп⁰ этой главы Но прежде всего мы покажемъ признакъ, по которому можно узнать дѣлимость произведенія

$$\varphi(x_0)\ \psi(x_0)\ \chi(x_0)\ \ldots\ .$$

на простое число p, не раскрывая этого произведенія, а производя дѣйствія только надъ множителями.

Съ этою цѣлью разложимъ функцію $F(x)$ на простые множители по модулю p. Положимъ, что

$$(2) \qquad F(x) = V^m\ V_1^{m_1}\ \ldots\ .\ V_s^{m_s} + p\ F_1(x),$$

гдѣ $V,\ V_1\ \ldots\ .\ V_s$ суть различныя простыя функціи по модулю p и $F_1 x$ нѣкоторый полиномъ съ цѣлыми коеффиціентами. Если комплексное число $\varphi(x_0)\ \psi(x_0)\ \chi(x_0)\ldots$ дѣлится на p, то раздѣливъ функцію $\varphi(x)\ \psi(x)\ \chi(x)\ldots$ на $F(x)$, мы должны получить остатокъ степени ниже n, всѣ коеффиціенты котораго дѣлятся на p. Обозначивъ черезъ $\varpi(x)$ частное въ этомъ дѣленіи, мы получимъ

$$\varphi(x)\ \psi(x)\ \chi(x)\ \ldots\ . - \varpi(x)\ F(x) \equiv 0 \text{ (мод. } p).$$

Такъ какъ $F(x)$ дѣлится по модулю p на $V^m\ V_1^{m_1}\ \ldots\ .\ V_s^{m_s}$, то изъ послѣдняго сравненія видно, что и произведеніе $\varphi(x)\ \psi(x)\ \chi(x)\ \ldots$ должно дѣлиться по модулю p на $V^m\ V_1^{m_1}\ \ldots V_s^{m_s}$. Обратно если произведеніе $\varphi(x)\ \psi(x)\ \chi(x)\ \ldots\ .$ дѣлится по модулю p на $V^m\ V_1^{m_1}\ \ldots\ .\ V_s^{m_s}$, то комплексное число $\varphi(x_0)\ \psi(x_0)\ \chi(x_0)\ldots\ .$ дѣлится на p. Въ самомъ дѣлѣ, дѣлимость функціи $\varphi(x)\ \psi(x)\ \chi(x)\ \ldots\ .$ на $V^m\ V_1^{m_1}\ \ldots\ .\ V_s^{m_s}$ по модулю p предполагаетъ сравненіе

$$\varphi(x)\ \psi(x)\ \chi(x)\ \ldots\ \equiv \lambda(x)\ V^m\ V_1^{m_1}\ \ldots\ .\ V_s^{m_s} \text{ (мод. } p),$$

гдѣ $\lambda(x)$ нѣкоторая функція, или, что тоже самое, сравненіе

$$\varphi(x)\ \psi(x)\ \chi(x)\ \ldots\ldots \equiv \lambda(x)\ F(x)\ (\text{мод. } p).$$

Откуда видно, что въ разности

$$\varphi(x)\ \psi(x)\ \chi(x)\ \ldots\ldots - \lambda(x)\ F(x)$$

коэффиціенты у всѣхъ степеней x дѣлятся на p и, слѣдовательно, комплексное число

$$\varphi(x_0)\ \psi(x_0)\ \chi(x_0)\ \ldots\ldots$$

дѣлится на p Кромѣ того замѣтимъ, что дѣлимость $\varphi(x)\ \psi(x)\ \chi(x)\ \ldots\ldots$ на $V^m\ V_1^{m_1}\ \ldots\ldots V_s^{m_s}$ можно узнать, какъ было показано въ I-ой главѣ, не перемножая на самомъ дѣлѣ функцій $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ ..... Для этого стоитъ только разложить эти функціи на простые множители по модулю p; тогда мы легко увидимъ входитъ ли въ произведеніе этихъ функцій множитель $V^m\ V_1^{m_1}\ \ldots\ldots V_s^{m_s}$.

Примѣръ. Пусть $p = 13$, $F(x) = x^2 - 3$, $x_0 = \sqrt{3}$, $x_1 = -\sqrt{3}$,

$$\varphi(x_0) = 4 + x_0,\ \psi(x_0) = 5 + 2\ x_0.$$

Мы имѣемъ

$$F(x) \equiv (x - 4)\ (x + 4)\ (\text{мод. } 13);$$

слѣдовательно можно положить

$$V = x - 4,\ V_1 = x + 4.$$

Поэтому получимъ

$$\psi(x) \equiv 2\ V\ (\text{мод. } 13)$$

$$\varphi x \psi x \equiv 2\ V V_1\ (\text{мод. } 13)$$

и слѣдовательно произведеніе

$$\varphi x_0\ \psi x_0$$

дѣлится на 13.

41.

Въ предыдущемъ n^0 было показано какимъ образомъ можно узнать дѣлится ли произведеніе нѣсколькихъ комплексныхъ чиселъ на простое число p не производя въ дѣйствительности умноженія. Теперь мы покажемъ какимъ образомъ узнать дѣлится ли норма какого нибудь комплекснаго числа $\varphi(x_0)$ на p, не вычисляя этой нормы на самомъ дѣлѣ. Мы обратимся снова къ уравненію (2) предыдущаго n^0 и положимъ, что степени функцій V, V_1 .... V_s равны соотвѣтственно ν, ν_1 .... ν_s. Можно принять кромѣ того, что коэффиціенты при высшихъ степеняхъ x въ функціяхъ V, V_1 .... V_s равны единицѣ, потому что коэффиціентъ высшаго члена $F(x)$ равенъ единицѣ.

Мы сначала докажемъ, что нормы комплексныхъ чиселъ

$$V(x_0),\ V_1(x_0),\ \ldots\ldots V_s(x_0)$$

дѣлятся соотвѣтственно на

$$p^{\nu},\ p^{\nu_1},\ \ldots\ldots p^{\nu_s}.$$

Достаточно для этого разсмотрѣть только одно изъ этихъ чиселъ напр. $V(x^0)$.

Положимъ, что корни уравненія

$$V = 0$$

будутъ

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_\nu$$

и, слѣдовательно,

$$V = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots\ldots (x - \alpha_\nu).$$

По опредѣленію нормы имѣемъ

$$\begin{aligned} NV(x_0) = {} & (x_0 - \alpha_1)(x_0 - \alpha_2) \ldots\ldots (x_0 - \alpha_\nu) \\ & (x_1 - \alpha_1)(x_1 - \alpha_2) \ldots\ldots (x_1 - \alpha_\nu) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (x_{n-1} - \alpha_1)(x_{n-1} - \alpha_2) \ldots\ldots (x_{n-1} - \alpha_\nu). \end{aligned}$$

Перемѣняя знакъ каждаго множителя, мы можемъ эту норму представить еще въ такомъ видѣ:

$$(1) \qquad NV(x_0) = (-1)^{\nu n} F(\alpha_1) F(\alpha_2) \ldots\ldots F(\alpha_\nu);$$

это послѣднее равенство прямо слѣдуетъ изъ того, что $NV(x_0)$ есть результанта отъ исключенія x изъ двухъ уравненій

$$V = 0 \text{ и } F(x) = 0,$$

какъ было замѣчено въ n^0 23.

Подставляя въ уравненіе (2) предыдущаго n^0 вмѣсто x послѣдовательно

$$\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_\nu$$

и перемножая результаты, получимъ

$$F(\alpha_1) F(\alpha_2) \ldots\ldots F(\alpha_\nu) = p^\nu F_1(\alpha_1) F_1(\alpha_2) \ldots\ldots F_1(\alpha_\nu);$$

слѣдовательно, по (1)

$$NV(x_0) = (-1)^{\nu n} p^\nu F_1(\alpha_1) F_1(\alpha_2) \ldots\ldots F_1(\alpha_\nu).$$

Замѣчая что

$$F_1(\alpha_1) F_1(\alpha_2) \ldots\ldots F_1(\alpha_\nu),$$

какъ цѣлая раціональная симметрическая функція корней уравненія

$$V = 0,$$

есть цѣлое число, мы видимъ, что $NV(x_0)$ дѣлится на p^ν. Подобнымъ же образомъ докажемъ, что нормы чиселъ

$$V_1(x_0), V_2(x_0), \ldots\ldots V_s(x_0)$$

дѣлятся соотвѣтственно на

$$p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, \ldots\ldots p^{\nu_s}.$$

Теперь докажемъ, что норма какого нибудь комплекснаго числа $W(x_0)$ не можетъ дѣлиться на p, если функція $W(x)$ не дѣлится по модулю p ни на одну изъ функцій $V, V_1, \ldots . V_s$. Дѣйствительно, если W не дѣлится ни на одну изъ функцій $V, V_1 \ldots . V_s$ по модулю p, то она—взаимно простая функція съ $F(x)$ по этому модулю, а потому можно найти (n^0 4) двѣ функціи A и B удовлетворяющія сравненію

$$AW - BF(x) \equiv 1 \text{ (мод. } p).$$

Внося сюда вмѣсто x послѣдовательно

$$x_0, x_1, \ldots . x_{n-1}$$

и перемножая результаты, получимъ

$$NA\, NW(x_0) \equiv 1 \text{ (мод. } p)$$

и, слѣдовательно, $NW(x)$ не дѣлится на p.

Итакъ необходимое условіе для того, чтобы норма какого нибудь комплекснаго числа $W(x_0)$ дѣлилась на p состоитъ въ томъ, чтобы функція W дѣлилась по модулю p на одну изъ функцій $V, V_1, \ldots . V_s$.

Докажемъ теперь, что это условіе будетъ и достаточнымъ. Положимъ, что функція W дѣлится по модулю p на одну изъ функцій

$$V, V_1 \ldots . V_s$$

напр. V. Поэтому будемъ имѣть

$$W = \varphi x\, V + p\psi x,$$

гдѣ φx и ψx два полинома съ цѣлыми коеффиціентами. Подставляя въ это равенство вмѣсто x послѣдовательно

$$x_0, x_1, \ldots . x_{n-1}$$

и перемножая результаты, получимъ

$$NW(x_0) \equiv N\overset{\varphi}{\psi}(x_0)\, NV(x_0) \text{ (мод. } p).$$

Такъ какъ $NV(x_0)$ дѣлится на p, то

$$NW(x_0) \equiv 0 \text{ (мод. } p).$$

И такъ доказано, что если W дѣлится по модулю p на одну изъ функцій

$$V, V_1 \ldots . V_s,$$

то норма $W(x_0)$ дѣлится на p.

42.

При помощи результатовъ найденныхъ въ предыдущемъ n^0 мы можемъ доказать слѣдующее предложеніе: *Если норма одного изъ комплексныхъ чиселъ*

$$V(x_0), V_1(x_0), \ldots . V_s(x_0)$$

напр. $NV(x_0)$ *дѣлится на* p *въ степени высшей* ν, *то она содержитъ* p *въ степени кратной* ν.

Мы имѣли уравненіе

$$NV(x_0) = (-1)^{n\nu} p^\nu F_1(\alpha_1) \dots F_1(\alpha_\nu).$$

Отсюда видно, что норма $V(x_0)$ можетъ дѣлиться на степень p высшую ν только въ томъ случаѣ когда число

$$F_1(\alpha_1)\, F_1(\alpha_2) \dots F_1(\alpha_\nu)$$

дѣлится на p.

Замѣчая, что это число представляетъ норму комплекснаго числа $F_1(x)$ относительно корней неприводимаго уравненія

$$V(x) = 0,$$

мы заключаемъ по доказанному выше, что $F_1(\alpha_1)\, F_1(\alpha_2) \dots F_1(\alpha_\nu)$ будетъ дѣлиться на p только тогда, когда $F_1(x)$ дѣлится на V по модулю p, такъ какъ V есть простая функція по этому модулю.

Положимъ въ этомъ случаѣ

$$F_1(x) = \psi(x)\; V + p\varpi(x),$$

гдѣ $\psi(x)$ и $\varpi(x)$ полиномы съ цѣлыми коеффиціентами. Замѣняя въ этомъ равенствѣ x послѣдовательно черезъ α_1, $\alpha_2 \dots \alpha_\nu$ и перемножая результаты, получимъ

$$F_1(\alpha_1)\, F_1(\alpha_2) \dots F_1(\alpha_\nu) = p^\nu \varpi(\alpha_1)\, \varpi(\alpha_2) \dots \varpi(\alpha_\nu)$$

и слѣдовательно

$$NV(x_0) = (-1)^{n\nu}\, p^{2\nu} \,.\, \varpi(\alpha_1)\, \varpi(\alpha_2) \dots \varpi(\alpha_\nu).$$

Отсюда, принимая во вниманіе, что $\varpi(\alpha_1)\, \varpi(\alpha_2) \dots \varpi(\alpha_\nu)$ есть цѣлое число, видимъ, что норма $V(x_0)$, если она дѣлится на степень p высшую ν, дѣлится на $p^{2\nu}$.

Совершенно такимъ же образомъ докажемъ и общее предложеніе.

43.

Прежде чѣмъ перейти къ теоріи идеальныхъ множителей комплексныхъ чиселъ, мы сдѣлаемъ нѣсколько замѣчаній относительно основнаго уравненія

$$(1) \qquad F(x) = 0.$$

I. Всегда легко найти, какъ мы увидимъ, тѣ простыя числа или модули относительно которыхъ $F(x)$ допускаетъ кратныхъ множителей. Положимъ, что Δ есть цѣлое число равное дискриминантѣ уравненія (1) т. е. пусть

$$V = (x_0 - x_1)^2\, (x_0 - x_2)^2 \dots (x_{n-2} - x_{n-1})^2.$$

Такъ какъ уравненіе (1) предполагается неприводимымъ, и слѣдовательно, не имѣетъ равныхъ корней, то Δ будетъ отличаться отъ нуля. Поэтому можно положить

$$\Delta = \pm q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots . q_k^{\alpha_k},$$

гдѣ

$$q_1, q_2. \dots . q_k$$

различныя простыя числа. Мы докажемъ, что $F(x)$ допускаетъ кратныхъ множителей только относительно модулей $q_1, q_2, \dots . q_k$. Разсмотримъ сначала какое нибудь простое число p отличное отъ

$$q_1, q_2, \dots . q_k$$

и положимъ, что относительно этого модуля $F(x)$ допускаетъ кратнаго множителя V т. е. пусть

$$F(x) = \varphi(x) V^m + p\varpi(x),$$

гдѣ m цѣлое число большее единицы.

Тогда первая производная $F'(x)$ будетъ дѣлиться по модулю p на V(n^0 8) и слѣдовательно по предыдущему норма $F'(x_0)$ т. е. произведеніе

$$F'(x_0) F'(x_1) \dots . F'(x_{n-1})$$

будетъ дѣлиться на p. Такъ какъ эта норма можетъ отличаться только знакомъ отъ дискриминанты Δ, то p долженъ быть дѣлителемъ Δ, что противорѣчитъ предположенію. Изъ этого мы заключаемъ что $F(x)$ можетъ допускать кратныхъ множителей только относительно модулей $q_1, q_2, \dots . q_k$.

Теперь докажемъ, что относительно каждаго изъ простыхъ чиселъ

$$q_1, q_2 \dots . q_k$$

$F(x)$ дѣйствительно содержитъ кратные множители.

Допуская, что $F(x)$ не содержитъ кратныхъ множителей относительно какого нибудь простаго числа q_i, мы можемъ положить

$$F(x) = V V_1 \dots . V_s + q_i \varpi(x),$$

гдѣ $V, V_1 \dots . V_s$—различныя простыя функціи по модулю q_i. Въ этомъ случаѣ, какъ это видно изъ n^0 8, $F(x)$ не будетъ дѣлиться по модулю q_i ни на одну изъ функцій

$$V, V_1 \dots . V_s$$

Поэтому норма $F'(x_0)$ или, что все равно, дискриминанта Δ не можетъ дѣлиться на q_i, что опять противорѣчитъ предположенію.

II. Обращаемся теперь снова къ уравненію (2) n^0 40

(2) $$F(x) = V^m V_1^{m_1} \dots , . V_s^{m_s} + p F_1(x)$$

Функціи V, V_1 . . . . V_s не совсѣмъ опредѣлены, потому что коэффиціенты ихъ могутъ быть замѣнены числами сравнимыми по модулю p. Пользуясь этимъ обстоятельствомъ мы докажемъ, что если какое нибудь изъ чиселъ

$$m, m_1, \ldots . m_s$$

напр. m равно единицѣ, то функцію $F_1(x)$ можно предположить недѣлящеюся по модулю p на функцію V соотвѣтствующему этому показателю. Дѣйствительно положимъ, что $m = 1$ и $F_1(x)$ дѣлится по модулю p на V. Въ такомъ случаѣ мы можемъ взять вмѣсто V функцію

$$W = V + p\,\psi(x),$$

гдѣ $\psi(x)$ означаетъ функцію степени ниже чѣмъ V не дѣлящуюся на p. W будетъ также простая функція по модулю p той же степени какъ и V съ коэффиціентомъ равнымъ единицѣ при высшей степени x. Внося теперь въ равенство (2) вмѣсто V функцію W и замѣчая, что по предположенію, $m = 1$, получимъ

$$F(x) = WV_1^{m_1} V_2^{m_2} \ldots . V_s^{m_s} + p\,\varphi(x),$$

гдѣ

$$\varphi(x) = F_1(x) - \psi(x)\, V_1^{m_1} V_2^{m_2} \ldots V_s^{m_s},$$

Такъ какъ $F_1(x)$ по предположенію дѣлится по модулю p на V или, что тоже самое, на W, а $\psi(x)$ будучи степени ниже W не дѣлится, то $\varphi(x)$ также не можетъ дѣлиться по модулю p на W, чего мы и хотѣли достигнуть.

Замѣтимъ теперь, что если $F_1(x)$ въ равенствѣ (2) дѣлится по модулю p на ту изъ функцій V которой соотвѣтствуетъ показатель m большій единицы, то преобразованіе, которое было сейчасъ показано, не приводитъ къ функціи $\varphi(x)$ не дѣлящейся на V по модулю p. Такъ какъ въ этомъ случаѣ есть хоть одинъ показатель m большій единицы, то p должно быть однимъ изъ чиселъ $q_1, q_2 \ldots . q_k$.

Комплексныя числа, зависящія отъ корней такихъ уравненій

$$F(x) = 0,$$

для которыхъ имѣетъ мѣсто только что указанное обстоятельство обладаютъ нѣкоторыми особенными свойствами. Желая въ настоящемъ сочиненіи представить теорію комплексныхъ чиселъ въ самомъ простомъ видѣ, мы исключимъ такія комплексныя числа изъ нашего изслѣдованія и изложимъ свойства ихъ при другомъ случаѣ. И такъ мы исключимъ тѣ функціи $F(x)$, которыя по одному изъ модулей

$$q_1, q_2, \ldots . q_k$$

напр. q_i будутъ представляться подъ видомъ

$$F(x) = V^m V_1^{m_1} \ldots . V_s^{m_s} + q_i F_1(x),$$

гдѣ $F_1(x)$ дѣлится по модулю q_i на одну или нѣсколько функцій V, V_1, . . . V_s, которымъ соотвѣтствуютъ показатели большіе единицы.

44.

Переходя теперь собственно къ теоріи идеальныхъ множителей комплексныхъ чиселъ, я считаю не лишнимъ сдѣлать нѣкоторыя замѣчанія о тѣхъ задачахъ, рѣшеніе которыхъ мы будемъ имѣть въ виду. Главная изъ этихъ задачъ будетъ.

Узнать дѣлится ли одно комплексное число на другое не производя дѣленія на самомъ дѣлѣ, а разсматривая каждое изъ этихъ чиселъ отдѣльно.

Эта задача для комплексныхъ чиселъ вида $a + bi$ рѣшается при помощи разложенія числа на простые множители. Но нельзя употребить этого способа для рѣшенія той же задачи относительно какихъ угодно комплексныхъ чиселъ, если не ввести въ него какихъ нибудь новыхъ условій и измѣненій. Дѣйствительно, хотя и можно разложить каждое комплексное число на простые множители т. е. на такіе, которые уже не будутъ сами разлагаться на множители, но можетъ быть нѣсколько подобныхъ разложеній совершенно различныхъ. Поэтому изъ этого разложенія на простые множители нельзя уже вывести тѣхъ теоремъ, которыя получаются для чиселъ вида $a+bi$. Убѣдиться въ этомъ весьма не трудно; мы приведемъ здѣсь примѣръ, помѣщенный въ сочиненіи «Vorlesungen über Zahlentheorie» Lejeune Dirichlet. Положимъ, что разсматриваются комплексныя числа отъ корней уравненія

$$x^2 + 11 = 0.$$

Число 15 можетъ быть представлено какъ произведеніе чиселъ 3 и 5 и какъ произведеніе чиселъ $2 + \sqrt{-11}$ и $2 - \sqrt{-11}$; числа 3, 5, $2 - \sqrt{-11}$ и $2 + \sqrt{-11}$ не могутъ быть разложены на множители вида $a + b\sqrt{-11}$.

Въ слѣдующихъ nn^0 мы изложимъ способъ для рѣшенія вышеупомянутой задачи относительно комплексныхъ чиселъ; мы увидимъ, что онъ даетъ для общихъ комплексныхъ чиселъ то, что для чиселъ вида $a + bi$ получается при помощи разложенія на простые множители и поэтому можетъ служить для рѣшенія многихъ другихъ задачъ.

45.

Пусть
$$F(x) = 0$$
будетъ опять основное неприводимое уравненіе степени n [причемъ исключенъ тотъ случай, о которомъ мы говорили въ концѣ n^0 43]. При изслѣдованіи комплексныхъ чиселъ зависящихъ отъ корней этого уравненія мы допустимъ слѣдующее:

Мы будемъ считать всякое обыкновенное простое число p, относительно котораго $F(x)$ есть простая функція, также простымъ и въ ряду комплексныхъ чиселъ зависящихъ отъ корня уравненія

$$F(x) = 0.$$

Всѣ другія обыкновенныя простыя числа будемъ считать сложными въ томъ же ряду комплексныхъ чиселъ.

Это распредѣленіе чиселъ на простыя и сложныя основано на слѣдующей теоремѣ.

Теорема. *Если произведеніе нѣсколькихъ комплексныхъ чиселъ дѣлится на обыкновенное простое число p, относительно котораго $F(x)$ есть простая функція, то одинъ изъ множителей дѣлится на p.*

Доказат. Пусть

$$\varphi(x_0),\ \psi(x_0),\ \chi(x_0),\ \ldots\ldots$$

будутъ комплексныя числа, произведеніе которыхъ дѣлится на p. Мы предполагаемъ, что каждое изъ этихъ чиселъ представлено подъ видомъ

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots\ldots + a_{n-1} x_0^{n-1},$$

гдѣ $a_0,\ a_1\ \ldots\ldots\ a_{n-1}$ суть числа цѣлыя, такъ что степени функцій $\varphi(x),\ \psi(x)\ \ldots\ldots$ не превышаютъ $n-1$. Принимая во вниманіе, что $F(x)$ есть простая функція по модулю p мы, по доказанному въ n^0 40, заключаемъ, что одна изъ функцій

$$\varphi(x),\ \psi(x),\ \chi(x)\ \ldots\ldots$$

должна дѣлиться на $F(x)$ по модулю p.

Замѣчая кромѣ того, что всѣ эти функціи степени ниже Fx, мы видимъ что по крайней мѣрѣ у одной изъ нихъ всѣ коеффиціенты $a_0,\ a_1\ \ldots\ldots\ a_{n-1}$ должны дѣлиться на p ч. и т. д.

Изъ доказанной теоремы слѣдуетъ, что числа p, которыя мы согласились считать простыми въ ряду комплексныхъ чиселъ не дѣлятся ни на какія комплексныя числа кромѣ p и комплексныхъ единицъ.

Дѣйствительно, положимъ, что p равно произведенію двухъ комплексныхъ чиселъ $\varphi(x_0)$ и $\psi(x_0)$. Такъ какъ произведеніе $\varphi(x_0)\ \psi(x_0)$ дѣлится на p, то по предыдущему, одно изъ комплексныхъ чиселъ $\varphi(x_0)$, $\psi(x_0)$ дѣлится на p. И такъ можно принять

$$\varphi(x_0) = p\varphi_1(x_0),$$

гдѣ $\varphi_1(x_0)$ есть также цѣлое комплексное число. При этомъ мы получимъ

$$1 = \varphi_1 x_0 \psi x_0$$

и слѣдовательно $\varphi_1 x_0$ и ψx_0 суть комплексныя единицы.

Разсмотримъ далѣе такія обыкновенныя простыя числа относительно которыхъ $F(x)$ не будетъ простая функція. Пусть p будетъ одно изъ такихъ чиселъ. Въ этомъ случаѣ $F(x)$ можно разложить по этому модулю на простые множители. Положимъ

$$F(x) = V^m V_1^{m_1}\ \ldots\ldots\ V_s^{m_s} + pF_1(x) \tag{1}$$

гдѣ

$$V,\ V_1\ \ldots\ldots\ V_s$$

суть различныя простыя функціи по модулю p и $F_1 x$ функція не дѣлящаяся по этому модулю ни на одну изъ функцій (n^0 43)

$$V,\ V_1,\ \ldots\ldots\ V_s.$$

Пусть

$$\nu,\ \nu_1\ \ldots\ldots\ \nu_s$$

будутъ соотвѣтственно степени функцій

$$V,\ V_1\ \ldots\ldots\ V_s.$$

Такое число p мы будемъ принимать сложнымъ въ ряду комплексныхъ чиселъ и состоящимъ изъ m одинаковыхъ простыхъ множителей, принадлежащихъ функціи V; изъ m_1 одинаковыхъ простыхъ множителей принадлежащихъ функціи V_1 и т. д., и наконецъ изъ m_s одинаковыхъ простыхъ множителей принадлежащихъ функціи V_s. Это условіе относительно числа p мы принимаемъ независимо отъ того разлагается ли въ дѣйствительности число p на столько комплексныхъ множителей или нѣтъ. Мы увидимъ ниже, что если p представляется подъ видомъ

$$p = \varphi^{m}(x_0)\,\varphi_1^{m_1}(x_0)\;.\;.\;.\;.\;\varphi_s^{m_s}(x_0), \tag{2}$$

гдѣ $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, ... $\varphi_s(x)$ функціи дѣлящіяся по модулю p соотвѣтственно на

$$V,\; V_1\;.\;.\;.\;.\;V_s,$$

то при всякомъ другомъ подобномъ разложеніи

$$p = \psi^{m}(x_0)\,\psi_1^{m_1}(x_0)\;.\;.\;.\;.\;\psi_s^{m_s}(x_0)$$

отношенія

$$\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)},\;\frac{\varphi_1(x_0)}{\psi_1(x_0)},\;.\;.\;.\;\frac{\varphi_s(x_0)}{\psi_s(x_0)}$$

будутъ равны нѣкоторымъ комплекснымъ единицамъ. Въ этомъ случаѣ числа

$$\varphi(x_0),\;\varphi_1(x_0)\;.\;.\;.\;.\;\varphi_s(x_0)$$

будутъ дѣйствительные множители числа p.

Въ противномъ случаѣ, когда p не представляется подъ видомъ (2), мы будемъ называть множители числа p *идеальными*. Замѣтимъ, что названіе идеальныхъ чиселъ употребляется въ двухъ смыслахъ: во первыхъ въ смыслѣ чиселъ противоположныхъ существующимъ, и во вторыхъ, въ общемъ смыслѣ множителей комплексныхъ чиселъ, между которыми существующіе заключаются какъ частный случай. Пусть fx_0 будетъ нѣкоторое комплексное число. Мы будемъ говорить, что $f(x_0)$ *дѣлится на простой идеальный множитель* p *принадлежащій функціи* V, *если* $f(x)$ *дѣлится на* V *по модулю* p.

Точно также, если $f(x)$ дѣлится на V_1 по модулю p, то мы будемъ говорить, что $f(x_0)$ дѣлится на идеальный множитель p принадлежащій функціи V_1 и т. д.

Чтобы разсѣять нѣкоторыя недоразумѣнія, которыя могутъ явиться относительно идеальныхъ чиселъ, я считаю не лишнимъ сдѣлать слѣдующее замѣчаніе:

Надъ идеальными числами нельзя прямо безъ особенныхъ соглашеній производить извѣстныя дѣйствія; точно также не имѣютъ смысла разсужденія относительно величины этихъ чиселъ. Идеальныя числа не болѣе какъ терминъ, какъ особенный и очень удобный способъ выражать нѣкоторыя соотношенія для комплексныхъ чиселъ дѣйствительно существующихъ. Этотъ терминъ былъ введенъ **Куммеромъ** для частнаго случая комплексныхъ чиселъ имъ изслѣдованнаго.

46.

Выведемъ теперь критеріумъ по которому узнается какіе идеальные множители числа p и сколько разъ содержатся въ нѣкоторомъ данномъ комплексномъ числѣ $\varphi(x)$.

Обозначимъ соотвѣтственно черезъ

$$W,\ W_1,\ \dots\ W_s$$

функціи

$$V_1^{m_1}\ V_2^{m_2}\ \dots\ V_s^{m_s},\ V^m\ V_2^{m_2}\ \dots\ V_s^{m_s},\ \dots\ V^m\ V_1^{m_1}\ V_2^{m_2} \dots,\ V_{s-1}^{m_{s-1}}.$$

Мы будемъ говорить, что комплексное число $\varphi(x_0)$ содержитъ идеальный множитель числа p принадлежащій функціи V ровно λ разъ, гдѣ

$$\lambda = km + r,$$

k — частное и r остатокъ отъ дѣленія λ на m, если имѣетъ мѣсто сравненіе

$$\varphi(x)\ V^{m-r}\ W^{k+1} \equiv 0\ (\text{мод. } p^{k+1},\ F(x)), \tag{1}$$

а сравненіе

$$\varphi(x)\ V^{2m-r-1}\ W^{k+2} \equiv 0\ (\text{мод. } p^{k+2},\ F(x)) \tag{2}$$

не имѣетъ мѣста. Сравненіе (1) выражаетъ, что функція

$$\varphi(x)\ V^{m-r}\ W^{k-1}$$

по раздѣленіи на $F(x)$ даетъ остатокъ степени не выше $n - 1$, всѣ коэффиціенты котораго дѣлятся на p^{k+1}.

Совершенно также опредѣляется степень и другихъ идеальныхъ множителей числа p содержащихся въ $\varphi(x_0)$. Мы согласимся говорить, что $\varphi(x_0)$ содержитъ идеальный множитель числа p принадлежащій функціи V_1 ровно λ_1 разъ, гдѣ $\lambda_1 = k_1 m_1 + r_1$ и k_1 — частное, а r_1 — остатокъ отъ дѣленія λ_1 на m_1, если имѣетъ мѣсто сравненіе

$$\varphi(x)\ V_1^{m_1-r_1}\ W_1^{k_1+1} \equiv 0\ (\text{мод. } p^{k_1+1},\ F(x))$$

а сравненіе

$$\varphi(x)\ V_1^{2m_1-r_1-1}\ W_1^{k_1+2} \equiv 0\ (\text{мод. } p^{k_1+2},\ F(x))$$

не имѣетъ мѣста.

Если $\lambda = 1$, то $k = 0$, $r = 1$ и сравненіе (1) обращается въ такое:

$$\varphi(x)\ V^{m-1}\ W \equiv 0\ (\text{мод. } p,\ F(x))$$

Изъ этого сравненія, на основаніи того что мы говорили въ n^0 40 о дѣлимости произведенія комплексныхъ чиселъ на p, мы заключаемъ, что $\varphi(x)$ должно дѣлиться на V по модулю p; слѣдовательно, при $\lambda = 1$, условіе что какое нибудь комплексное число содержитъ множитель p принадлежащій функціи V совпадаетъ съ тѣмъ, которое мы сообщили въ n^0 45.

Далѣе мы докажемъ нѣкоторыя теоремы, изъ которыхъ вполнѣ будетъ видно какую роль играютъ идеальныя числа въ теоріи комплексныхъ чиселъ.

47.

Теорема. *Если комплексное число* $\varphi(x_0)$ *содержитъ идеальный множитель числа*

p принадлежащій функціи V λ разъ, а комплексное число $\psi(x_0)$ не дѣлится на этотъ множитель, то произведеніе $\varphi(x_0)\psi(x_0)$ содержитъ этотъ множитель ровно λ разъ.

Доказат. Пусть $\lambda = km + r$, гдѣ k частное и r остатокъ отъ дѣленія λ на m. Согласно предположенію имѣемъ (n^0 46).

$$(1) \qquad \varphi(x)\, V^{m-r}\, W^{k+1} = p^{k+1}\, \varphi_1(x) + \varpi(x)\, F(x),$$

гдѣ $\varphi(x)$ и $\varpi(x)$ два полинома съ цѣлыми коэффиціентами. Легко видѣть, что $\varphi_1 x$ не дѣлится на V по модулю p; дѣйствительно, въ противномъ случаѣ остатокъ отъ дѣленія функціи

$$p^{k+1}\, \varphi_1(x)\, V^{m-1}\, W$$

на Fx, или, что тоже самое, остатокъ отъ дѣленія функціи

$$\varphi(x)\, V^{2m-r-1}\, W^{k+2}$$

на Fx дѣлился бы на p^{k+2} и, слѣдовательно, комплексное число $\varphi(x_0)$ содержало бы множитель p принадлежащій функціи V болѣе λ разъ (n^0 46).

Изъ (1) получаемъ равенство

$$\psi(x)\, \varphi(x)\, V^{m-r}\, W^{k+1} = p^{k+1}\, \varphi_1(x)\, \psi(x) + \varpi(x)\, \psi(x)\, F(x)$$

показывающее, что комплексное число $\varphi(x_0)$ $\psi(x_0)$ содержитъ множитель p принадлежащій функціи V по крайней мѣрѣ λ разъ. Замѣчая кромѣ того, что функція $\varphi_1 x$ ψx не дѣлится на V по модулю p мы заключаемъ, что функція

$$p^{k+1}\, \varphi_1(x)\, \psi(x)\, V^{m-1}\, W$$

или, что тоже самое, функція

$$\psi(x)\, \varphi(x)\, V^{2m-r-1}\, W^{k+2}$$

не можетъ быть сравнима съ нулемъ по модулю p^{k+2} и функціи $F(x)$; и слѣдовательно (n^0 46), произведеніе $\varphi(x_0)$ $\psi(x_0)$ содержитъ множитель p принадлежащій функціи V ровно λ разъ.

48.

Теорема. *Произведеніе $\varphi(x_0)$ $\psi(x_0)$ двухъ комплексныхъ чиселъ содержитъ идеальный множитель числа p принадлежащій функціи V ровно столько разъ, сколько оба множителя $\varphi(x_0)$ и $\psi(x_0)$ вмѣстѣ.*

Доказат. Положимъ, что φx_0 содержитъ этотъ множитель λ разъ, а ψx_0 — λ' разъ.

Полагая какъ и прежде

$$\lambda = km + r,\ \lambda' = k'm + r'$$

получимъ равенства

$$\varphi(x)\, V^{m-r}\, W^{k+1} = p^{k+1}\, \varphi_1(x) + \varpi(x)\, F(x)$$

$$\varphi(x)\, V^{m-r'}\, W^{k'+1} = p^{k'+1}\, \psi_1(x) + \varpi_1(x)\, F(x),$$

гдѣ ни одна изъ функцій $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ не дѣлится на V по модулю p.

Изъ этихъ равенствъ выводимъ такое:

$$(1) \qquad \varphi(x)\,\psi(x)\,V^{2m-r-r'}\,W^{k+k'+2} = p^{k+k'+2}\,\varphi_1(x)\,\psi_1(x) + \Omega(x)\,F(x),$$

гдѣ $\Omega(x)$ полиномъ съ цѣлыми коеффиціентами. Теперь надобно разобрать слѣдующіе случаи:

$$(\mathrm{I}) \qquad r + r' < m$$

Изъ уравненія

$$F(x) = V^m\,V_1^{m_1}\,\ldots\,V_s^{m_s} + p\,F_1(x)$$

имѣемъ

$$V^m\,W = -\,p\,F_1(x) + F(x).$$

На основаніи этого, равенство (1) представляется подъ видомъ

$$-\,F_1(x)\,\varphi(x)\,\psi(x)\,V^{m-r-r'}\,W^{k+k'+1} = p^{k+k'+1}\,\varphi_1(x)\,\psi_1(x) + \Omega_1(x)\,F(x),$$

гдѣ

$$\Omega_1(x)$$

есть также полиномъ съ цѣлыми коеффиціентами. Изъ этого равенства видно, что произведеніе

$$F_1(x_0)\,\varphi(x_0)\,\psi(x_0)$$

содержитъ множитель p принадлежащій функціи V ровно

$$(k + k')\,m + r + r' = \lambda + \lambda'$$

разъ. Такъ какъ $F_1(x_0)$ не дѣлится на этого множителя, то $\varphi(x_0)\,\psi(x_0)$ содержитъ его $\lambda + \lambda'$ разъ ч. и т. д.

(II) $\qquad r + r' \geqq m$; причемъ, конечно, $r + r' < 2m$.

Полагая $r + r' = m + \rho$, гдѣ $\rho < m$, представимъ равенство (1) подъ такимъ видомъ:

$$\varphi(x)\,\psi(x)\,V^{m-\rho}\,W^{k+k'+2} = p^{k+k'+2}\,\varphi_1(x)\,\psi_1(x) + \Omega(x)\,F(x).$$

Изъ этого равенства видно, что комплексное число $\varphi(x_0)\,\psi(x_0)$ содержитъ идеальный множитель числа p принадлежащій функціи V ровно $(k + k' + 1)\,m + \rho = \lambda + \lambda'$ разъ ч. и т. д. Понятно, что теорему можно распространить на тотъ случай, когда разсматривается произведеніе не двухъ, а большаго числа множителей.

49.

Теорема. *Если комплексное число $\varphi(x_0)$ содержитъ идеальный множитель числа p принадлежащій функціи V не меньше λm разъ, гдѣ λ нѣкоторое цѣлое число, множитель p принадлежащій функціи V_1 не меньше λm_1 разъ и т.д. и наконецъ множитель p принадлежащій функціи V_s не меньше λm_s разъ, то $\varphi(x_0)$ дѣлится на p^λ.*

Доказат. Согласно предположенію имѣемъ

$$\varphi(x)\,V^m\,W^{\lambda+1} = p^{\lambda+1}\,\psi(x) + \varpi(x)\,F(x).$$

Откуда, замѣчая что

$$V^m\ W = -p\ F_1(x) + F(x),$$

получаемъ

$$-\varphi(x)\ F_1(x)\ W^\lambda = p^\lambda\ \psi(x) + \Omega(x)\ F(x),$$

гдѣ $\Omega(x)$ полиномъ съ цѣлыми коеффиціентами. Такимъ же образомъ находимъ

$$\begin{gathered}
-\varphi(x)\ F_1(x)\ W_1^\lambda = p^\lambda\ \psi_1(x) + \Omega_1(x)\ F(x) \\
-\varphi(x)\ F_1(x)\ W_2^\lambda = p^\lambda\ \psi_2(x) + \Omega_2(x)\ F(x) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
-\varphi(x)\ F_1(x)\ W_s^\lambda = p^\lambda\ \psi_s(x) + \Omega_s(x)\ F(x)
\end{gathered}$$

Изъ этого равенства слѣдуетъ, что комплексное число

$$\varphi(x_0)\ F_1(x_0)\ (W^\lambda(x_0) + W_1^\lambda(x_0) + \ldots + W_s^\lambda(x_0)$$

дѣлится на p^λ. Такъ какъ функція

$$F_1(x)\ (W^\lambda + W_1^\lambda + \ldots\ W_s^\lambda)$$

не дѣлится по модулю p ни на одну изъ функцій

$$V,\ V_1\ \ldots\ V_s,$$

то (n^0 40) комплексное число $\varphi(x_0)$ должно дѣлиться на p. Положивъ

$$\varphi(x_0) = p\varphi_1(x_0)$$

и продолжая тоже разсужденіе, найдемъ, что $\varphi_1(x_0)$ дѣлится на p, слѣдовательно $\varphi(x_0)$ дѣлится на p^2, и, очевидно, что подобнымъ же образомъ докажемъ, что $\varphi(x_0)$ дѣлится на p^λ.

50.

Въ этомъ n^0 мы докажемъ одно свойство нормы комплекснаго числа.

Положимъ, что комплексное число $\varphi(x_0)$ содержитъ идеальный множитель p принадлежащій функціи V λ разъ, множитель p принадлежащій функціи V_1 λ_1 разъ и т. д. и наконецъ множитель p принадлежащій функціи V_s —λ_s разъ. Мы докажемъ, что въ такомъ случаѣ норма $\varphi(x_0)$ будетъ содержать число p множителемъ ровно $\lambda\nu + \lambda_1\nu_1 + \ldots\ \lambda_s\nu_s$ разъ.

Съ этою цѣлью составимъ комплексное число

$$\varphi(x_0)\ V^{mk-\lambda}(x_0)\ V_1^{m_1k-\lambda_1}(x_0)\ \ldots\ V_s^{m_sk-\lambda_s}(x_0), \tag{1}$$

гдѣ k какое нибудь изъ цѣлыхъ чиселъ удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$mk > \lambda,\ m_1k > \lambda_1\ \ldots\ m_sk > \lambda_s.$$

Комплексное число (1) содержитъ множитель p принадлежащій функціи V ровно mk разъ, множитель p принадлежащій функціи V_1 ровно m_1k разъ и т. д. Слѣдовательно это комплексное число будетъ имѣть видъ

$$p^k\varphi_1(x_0),$$

гдѣ $\varphi_1(x_0)$ есть комплексное число недѣлящееся ни на одинъ изъ множителей p.

Взявши нормы комплексныхъ чиселъ составляющихъ обѣ части уравненія

$$\varphi(x_0)\ V^{mk-\lambda_0}(x_0)\ V_1^{m_1k-\lambda_1}(x_0)\ \ldots\ V_s^{m_sk-\lambda_s}(x_0)=p^k\varphi_1(x_0),$$

получимъ

$$N\varphi(x_0)\ (NV(x_0))^{mk-\lambda_0}\,.\,(NV_1(x_0))^{m_1k-\lambda_1}\ \ldots\ (NV_s(x_0))^{m_sk-\lambda_s}=p^{kn}N\varphi_1(x_0).$$

Замѣчая, что

$$NV,\ NV_1\ \ldots\ NV_s$$

содержатъ число p соотвѣтственно въ степеняхъ

$$\nu,\ \nu_1\ \ldots\ \nu_s$$

и что, по замѣченному выше, норма φ_1x_0 не дѣлится на p, мы видимъ, что $N\varphi x_0$ содержитъ число p въ степени

$$\lambda\nu+\lambda_1\nu_1+\ldots+\lambda_s\nu_s,$$

такъ какъ

$$n=m\nu+m_1\nu_1+\ldots+m_s\nu_s.$$

Изъ доказаннаго слѣдуетъ, что каждое комплексное число содержитъ идеальные множители только тѣхъ простыхъ чиселъ, которыя дѣлятъ его норму и притомъ каждый множитель только конечное число разъ.

Укажемъ еще на одно слѣдствіе предложенія доказаннаго въ этомъ n^0. Пусть $\Phi(x_0)$ будетъ союзное комплексное число съ $\varphi(x_0)$, которое мы только что разсматривали. Изъ равенства

$$\varphi(x_0)\ \Phi(x_0)=N\varphi(x_0)$$

по теоремѣ n^0 48 мы заключаемъ, что $\Phi(x_0)$ содержитъ идеальный множитель p принадлежащій функціи V

$$m(\lambda\nu+\lambda_1\nu_1+\ldots+\lambda_s\nu_s)-\lambda$$

разъ, множитель p принадлежащій функціи V_1

$$m_1(\lambda\nu+\lambda_1\nu_1+\ldots+\lambda_s\nu_s)-\lambda_1$$

разъ и т. д.

Пусть k будетъ самое меньшее изъ цѣлыхъ чиселъ удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$mk\geq\lambda,\ m_1k\geq\lambda_1\ \ldots\ m_sk\geq\lambda_s.$$

Въ такомъ случаѣ $\Phi(x_0)$ дѣлится (n^0 49) на $p^{\lambda\nu+\lambda_1\nu_1+\ldots+\lambda_s\nu_s-k}$.

51.

О разложеніи комплексныхъ чиселъ на простые идеальные множители

На основаніи сказаннаго въ предыдущемъ n^0 всегда можно узнать какіе идеальные множители обыкновенныхъ простыхъ чиселъ содержитъ какое нибудь данное комплексное число $\varphi(x_0)$. Кромѣ того съ этою цѣлью можно поступать еще слѣдующимъ образомъ:

Производимъ надъ двумя функціями $\varphi(x)$ и $F(x)$ послѣдовательныя дѣленія, при помощи которыхъ опредѣляется ихъ общій наибольшій дѣлитель. Такъ какъ уравненіе

$$F(x) = 0$$

есть неприводимое, то мы непремѣнно придемъ къ остатку равному постоянному количеству и притомъ раціональной дроби, потому что коэффиціенты функцій $\varphi(x)$ и $F(x)$ суть цѣлыя числа. Извѣстно какимъ образомъ получаются при этомъ двѣ такія функціи A и B, что разность

$$AF(x) - B\varphi(x)$$

будетъ равна обыкновенному цѣлому числу. Обозначая это число черезъ M, имѣемъ

$$AF(x) - B\varphi(x) = M.$$

Если $\varphi(x_0)$ дѣлится на нѣкоторый идеальный множитель обыкновеннаго простаго числа p, то (n^0 45) функціи $\varphi(x)$ и $F(x)$ будутъ имѣть общаго дѣлителя по этому модулю. Этотъ дѣлитель долженъ входить и въ M; а такъ какъ M есть обыкновенное цѣлое число, то M должно дѣлиться на p. На основаніи этого для опредѣленія идеальныхъ множителей комплекснаго числа $\varphi(x_0)$ мы сначала разлагаемъ $F(x)$ на простые множители по каждому изъ простыхъ чиселъ p дѣлящихъ M. Потомъ, имѣя эти разложенія, можно при помощи извѣстнаго намъ критеріума (n^0 46): узнать какіе идеальные множители и сколько разъ входятъ въ $\varphi(x_0)$.

Обозначимъ черезъ $d_1, d_2 \ldots . d_l$ — различные простые идеальные множители комплекснаго числа $\varphi(x_0)$ и $\lambda_1, \lambda_2 \ldots . \lambda_l$ степени кратности ихъ. Въ такомъ случаѣ мы можемъ написать равенство

$$\varphi(x_0) = d_1^{\lambda_1} d_2^{\lambda_2} \ldots . d_l^{\lambda_l} \varphi_1(x_0), \tag{1}$$

гдѣ $\varphi_1(x_0)$ означаетъ какую нибудь комплексную единицу. Понятно само собой, что это равенство символическое, потому что

$$d_1, d_2, \ldots . d_l$$

не суть величины. Равенство (1) выражаетъ внутренній составъ комплекснаго числа и представляетъ въ теоріи комплексныхъ чиселъ обобщеніе обыкновеннаго разложенія на простые множители для чиселъ вида $a + bi$.

52.

Изъ разложенія комплексныхъ чиселъ на простые идеальные множители объясненнаго въ предыдущемъ n^0, легко вывести критеріумъ по которому узнается дѣлимость одного комплекснаго числа $\varphi(x_0)$ на другое $\psi(x_0)$. Положимъ, что эти числа по разложеніи на простые идеальные множители имѣютъ видъ

$$\varphi(x_0) = d_1^{\lambda_1} d_2^{\lambda_2} \ldots . d_l^{\lambda_l} \varphi_1(x_0)$$
$$\psi(x_0) = e_1^{\mu_1} e_2^{\mu_2} \ldots . e_k^{\mu_k} \psi_1(x_0).$$

Мы докажемъ, что для дѣлимости $\varphi(x_0)$ на $\psi(x_0)$ необходимо и достаточно, чтобы всѣ множители

$$e_1,\, e_2,\, \ldots .\, e_k$$

заключались бы между

$$d_1,\, d_2,\, \ldots .\, d_l$$

и притомъ входили бы въ $\varphi(x_0)$ съ показателями соотвѣтственно не меньшими

$$\mu_1,\, \mu_2,\, \ldots .\, \mu_k.$$

Дѣйствительно, если $\varphi(x_0)$ дѣлится на $\psi(x_0)$, то будемъ имѣть

$$\varphi(x_0) = \psi(x_0)\, \varpi(x_0),$$

гдѣ $\varpi(x_0)$ — цѣлое комплексное число.

Очевидно, что въ этомъ случаѣ $\varphi(x_0)$ содержитъ всѣ простые идеальные множители числа $\psi(x_0)$

$$e_1,\, e_2\, \ldots .\, e_k$$

съ показателями не меньшими

$$\mu_1,\, \mu_2,\, \ldots .\, \mu_k.$$

Обратно, если въ $\varphi(x_0)$ входятъ всѣ множители

$$e_1,\, e_2,\, \ldots .\, e_k$$

съ показателями не меньшими

$$\mu_1,\, \mu_2,\, \ldots .\, \mu_k,$$

то $\varphi(x_0)$ дѣлится на $\psi(x_0)$. Въ самомъ дѣлѣ, замѣчая что

$$\frac{\varphi x_0}{\psi x_0} = \frac{\varphi(x_0)\, \Psi(x_0)}{N\psi(x_0)},$$

гдѣ $\Psi(x_0)$ есть союзное комплексное число съ $\psi(x_0)$, и что каждый идеальный множитель, дѣлящій $N\psi(x_0)$, входитъ въ произведеніе $\varphi(x_0)\ \Psi(x_0)$ съ большимъ показателемъ чѣмъ въ $N\psi(x_0)$, мы заключаемъ (n^0 49), что отношеніе $\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}$ есть цѣлое комплексное число.

Слѣдствіе I. Если отношеніе двухъ цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ $\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}$ не есть число цѣлое, то никакая цѣлая положительная степень m этого отношенія $\frac{\varphi^m(x_0)}{\psi^m(x_0)}$ не можетъ быть цѣлымъ комплекснымъ числомъ. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ $\psi(x_0)$ содержитъ по крайней мѣрѣ одинъ простой идеальный множитель съ показателемъ большимъ чѣмъ $\varphi(x_0)$; тоже самое будетъ имѣть мѣсто и относительно чиселъ $\varphi^m(x_0)$ и $\psi^m(x_0)$, а потому отношеніе $\frac{\varphi^m(x_0)}{\psi^m(x_0)}$ не можетъ быть цѣлымъ комплекснымъ числомъ.

Слѣдствіе II. Теперь легко убѣдиться въ справедливости предложенія, о которомъ мы говорили въ n^0 45. Положимъ, что обыкновенное простое число p представляется подъ видомъ

(1) $$p = \varphi^m(x_0)\, \varphi_1^{m_1}(x_0) \ldots .\, \varphi_s^{m_s}(x_0),$$

гдѣ

$$\varphi(x),\ \varphi_1(x),\ \ldots\ldots\ \varphi_s(x)$$

дѣлятся соотвѣтственно по модулю p на функціи

$$V,\ V_1\ \ldots\ldots\ V_s.$$

Поэтому комплексныя числа

$$\varphi(x_0),\ \varphi_1(x_0)\ \ldots\ldots\ \varphi_s(x_0)$$

содержатъ простые множители p принадлежащіе соотвѣтственно функціямъ

$$V,\ V_1\ \ldots\ldots\ V_s.$$

Изъ уравненія (1) видно, что онѣ содержатъ эти множители только въ первой степени и не содержатъ другихъ множителей. Итакъ если будетъ существовать другое подобное разложеніе

$$p = \psi^{m}(x_0)\ \psi_1^{m_1}(x_0)\ \ldots\ldots\ \psi_s^{m_s}(x_0),$$

то отношенія

$$\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)},\ \frac{\varphi_1(x_0)}{\psi_1(x_0)},\ \ldots\ldots\ \frac{\varphi_s(x_0)}{\psi_s(x_0)}$$

на основаніи сказаннаго въ этомъ n^0 непремѣнно должны быть равны комплекснымъ единицамъ.

53.

Изъ разложенія чиселъ на простые идеальные множители выводятся теоремы совершенно аналогичныя съ тѣми, которыя имѣютъ мѣсто для обыкновенныхъ цѣлыхъ чиселъ. Мы только укажемъ на нихъ, такъ какъ доказательства не представляютъ никакихъ затрудненій.

Два комплексныя числа называются относительно простыми, если онѣ не содержатъ общихъ идеальныхъ множителей.

Теорема. *Если какое нибудь комплексное число* $\psi(x_0)$ *простое относительно числа* $\varphi(x_0)$ *дѣлитъ произведеніе комплексныхъ чиселъ* $\varphi(x_0)\ \varphi_1(x_0)$, *то оно дѣлитъ число* $\varphi_1(x_0)$.

Теорема. *Если комплексное число* $\psi(x_0)$ *будетъ простымъ относительно каждаго изъ комплексныхъ чиселъ* $\varphi(x_0)$, $\varphi_1(x_0)$, $\varphi_2(x_0)$ $\ldots\ldots$, *то оно будетъ простымъ и относительно произведенія ихъ.*

Мы считаемъ необходимымъ теперь опредѣлить какъ слѣдуетъ понимать произведеніе двухъ или нѣсколькихъ простыхъ идеальныхъ чиселъ. Мы видѣли, что каждое простое идеальное число замѣняетъ нѣкоторое сравненіе; совокупность сравненій соотвѣтствующихъ двумъ простымъ идеальнымъ числамъ замѣняется новымъ идеальнымъ числомъ, которое называется *произведеніемъ* двухъ прежнихъ. Произведеніе всѣхъ общихъ идеальныхъ множителей двухъ какихъ нибудь цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ называемъ ихъ *общимъ наибольшимъ дѣлителемъ*.

54.

Частные случаи комплексныхъ чиселъ.

Въ предыдущихъ nn^0 мы разсматривали комплексныя числа, зависящія отъ корня неприводимаго уравненія

$$F(x) = 0$$

съ цѣлыми коэффиціентами. Въ теоріи этихъ чиселъ заключаются какъ частные случаи — теорія Гаусса для чиселъ вида $a + bi$ и теорія Куммера для комплексныхъ чиселъ зависящихъ отъ корней нѣкоторой степени изъ единицы Мы остановимся нѣсколько на этихъ частныхъ случаяхъ.

Положимъ сначала

$$F(x) = x^2 + 1.$$

Пусть p будетъ какое нибудь обыкновенное простое число.

Функція $x^2 + 1$ можетъ быть или простою по модулю p или представлять произведеніе двухъ простыхъ функцій первой степени. Въ послѣднемъ случаѣ, такъ какъ сравненіе

$$x^2 + 1 \equiv 0 \text{ (мод. } p)$$

будетъ имѣть два корня, p должно равняться 2 или быть вида $4n + 1$. Поэтому простыя числа вида $4n + 3$ будутъ также простыми и въ ряду чиселъ $a + bi$.

Замѣчая, кромѣ того, что

$$2 = (1 + i)\,(1 - i)$$

и что каждое простое число вида $4n + 1$ разлагается на сумму двухъ квадратовъ $a^2 + b^2$ или, что тоже самое, есть произведеніе двухъ множителей

$$(a + bi)\,(a - bi),$$

мы видимъ, что эти числа будутъ сложными въ ряду комплексныхъ чиселъ вида $a + bi$. Въ разсматриваемомъ случаѣ не будетъ идеальныхъ множителей; всѣ простые множители будутъ существующими.

55.

Теперь мы разсмотримъ комплексныя числа зависящія отъ корней уравненія

$$(1) \qquad \frac{x^n - 1}{x - 1} = 0,$$

гдѣ n простое и нечетное. Мы увидимъ, что теоремы относительно этихъ чиселъ доказанныя Куммеромъ выводятся очень просто изъ общей теоріи комплексныхъ чиселъ изложенной выше. Пусть α будетъ одинъ изъ корней уравненія (1). Тогда всѣ корни этого уравненія будутъ

$$(2) \qquad \alpha,\ \alpha^2,\ \ldots\ldots\ \alpha^{n-1}.$$

Пусть кромѣ того p будетъ простое нечетное число. Положимъ сначала, что $p = n$. Функція

$\frac{x^n - 1}{x - 1}$ сравнима по модулю n (n^0 15) съ $(x - 1)^{n-1}$; число n дѣйствительно равно $n - 1$-й степени комплекснаго числа. Мы имѣемъ

$$n = (1 - \alpha)(1 - \alpha^2) \ldots (1 - \alpha^{n-1}) = (1 - \alpha)^{n-1} \cdot \frac{1 - \alpha^2}{1 - \alpha} \cdot \frac{1 - \alpha^3}{1 - \alpha} \ldots \frac{1 - \alpha^{n-1}}{1 - \alpha},$$

гдѣ произведеніе

$$\frac{1 - \alpha^2}{1 - \alpha} \cdot \frac{1 - \alpha^3}{1 - \alpha} \ldots \frac{1 - \alpha^{n-1}}{1 - \alpha},$$

какъ легко видѣть, равно комплексной единицѣ.

Положимъ теперь, что p не равно n и принадлежитъ къ показателю h по модулю n; такъ что

$$p^h \equiv 1 \text{ (мод. } n).$$

Обозначая $\frac{n-1}{h}$ черезъ k и черезъ g какой нибудь первообразный корень числа n, мы можемъ всѣ корни (2) распредѣлить въ слѣдующіе періоды

$$\begin{aligned}
\beta \quad &= \alpha + \alpha^{g^k} + \alpha^{g^{2k}} + \ldots + \alpha^{g^{(h-1)k}} \\
\beta_1 \quad &= \alpha^g + \alpha^{g^{k+1}} + \alpha^{g^{2k+1}} + \ldots + \alpha^{g^{(h-1)k+1}} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\beta_{k-1} &= \alpha^{g^{k-1}} + \alpha^{g^{2k-1}} \qquad + \ldots + \alpha^{g^{hk-1}}.
\end{aligned}$$

На основаніи извѣстныхъ соотношеній между періодами можно всякую цѣлую раціональную функцію періодовъ съ цѣлыми коэффиціентами представить подъ видомъ

$$a_0\beta + a_1\beta_1 + \ldots + a_{k-1}\beta_{k-1},$$

гдѣ a_0, a_1 .... a_{k-1} суть числа цѣлыя.

Эту функцію можно разсматривать какъ зависящую отъ одного періода β и потому ее обозначаютъ черезъ $F(\beta)$.

Было доказано, что функція $\frac{x^n - 1}{x - 1}$ по модулю p имѣетъ видъ

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = PP_1P_2 \ldots P_{k-1} + p\psi(x), \tag{3}$$

гдѣ P, P_1 .... P_{k-1} различныя простыя функціи по модулю p степени h и $\psi(x)$ полиномъ съ цѣлыми коэффиціентами (n^0 15).

Также мы видѣли, что, если въ выраженіяхъ періодовъ

$$\beta, \beta_1, \ldots \beta_{k-1}$$

α замѣнить черезъ x, то полученные періоды

$$\eta, \eta_1 \ldots \eta_{k-1}$$

будутъ сравнимы по модулю p и каждый изъ функцій P, P_1 .... P_{k-1} съ постоянными числами.

Положимъ, что по модулю p и функціи P эти періоды сравнимы соотвѣтственно съ числами

$$u,\ u_1,\ \ldots .\ u_{k-1}.$$

Тогда при замѣщеніи функціи P какою нибудь изъ остальныхъ

$$P_1,\ P_2,\ \ldots .\ P_{k-1}$$

числа $$u,\ u_1\ \ldots .\ u_{k-1}$$

перестановятся циклически; такъ что періоды будутъ сравнимы соотвѣтственно съ

$$u_r,\ u_{r+1},\ \ldots .\ u_{r+k-1},$$

гдѣ предполагается $$u_{\lambda+sk} = u_\lambda.$$

Мы будемъ обозначать соотвѣтственно черезъ $F(u)$ и $F(u_r)$ значенія функцій

$$F(\eta) = a_0\eta + a_1\eta_1 + \ldots . + a_{k-1}\eta_{k-1}$$

$$F(\eta_r) = a_0\eta_r + a_1\eta_{k+1} + \ldots . + a_{k-1}\eta_{r+k-1},$$

когда $$\eta,\ \eta_1\ \ldots .\ \eta_{k-1}$$

замѣнятся соотвѣтственно цѣлыми числами

$$u,\ u_1\ \ldots .\ u_{k-1}.$$

Изъ уравненія (3) видно, что число p состоитъ изъ k идеальныхъ множителей принадлежащихъ соотвѣтственно функціямъ

$$P,\ P_1\ \ldots .\ P_{k-1}.$$

Положимъ теперь какимъ образомъ узнать содержитъ ли какое нибудь комплексное число $\varphi(\alpha)$ идеальный множитель принадлежащій функціи P.

Извѣстно, что α удовлетворяетъ уравненію степени h

$$\alpha^h + A_1\alpha^{h-1} + A_2\alpha^{h-2} + \ldots . = 0,$$

гдѣ A_1, A_2 . . . . суть цѣлыя раціональныя функціи періодовъ

$$\beta,\ \beta_1\ \ldots .\ \beta_{k-1}.$$

Поэтому всякое комплексное число $\varphi(\alpha)$ можетъ быть приведено къ виду

$$\varphi(\alpha) = \varphi_1(\beta) + \varphi_2(\beta)\,\alpha + \varphi_3(\beta)\,\alpha^2 + \ldots . + \varphi_{h-1}(\beta)\,\alpha^{h-1},$$

гдѣ $$\varphi_1(\beta),\ \varphi_2(\beta)\ \ldots .\ \varphi_{h-1}(\beta)$$

суть цѣлыя раціональныя функціи періодовъ

$$\beta,\ \beta_1,\ \ldots .\ \beta_{k-1}.$$

Для того, чтобы число $\varphi(\alpha)$ содержало идеальный множитель p принадлежащій функціи P, необходимо и достаточно, чтобы функція

$$\varphi(x) = \varphi_1(\eta) + \varphi_2(\eta)\,x + \varphi_3(\eta)\,x^2 + \ldots\ldots + \varphi_{h-1}(\eta)\,x^{h-1},$$

полученная изъ $\varphi(\alpha)$ перемѣною α на x дѣлилась на P по модулю p.

При этомъ, пользуясь свойствами періодовъ, мы можемъ замѣнить періоды

$$\eta,\ \eta_1\ \ldots\ldots\ \eta_{k-1}$$

соотвѣтствующими цѣлыми числами

$$u,\ u_1\ \ldots\ldots\ u_{k-1}$$

и, слѣдовательно, функцію $\varphi(x)$ такою:

$$\varphi_1(u) + \varphi_2(u)\,x + \varphi_3(u)\,x^2 + \ldots\ldots + \varphi_{h-1}(u)\,x^{h-1}.$$

Эта послѣдняя можетъ дѣлиться по модулю p на функцію P степени h только въ такомъ случаѣ, когда

$$\varphi_1(u) \equiv 0,\ \varphi_2(u) \equiv 0,\ \ldots\ldots\ \varphi_{h-1}(u) \equiv 0\ (\text{мод}\ p).$$

Эти сравненія и составляютъ критеріумъ данный **Куммеромъ** для того, чтобы $\varphi(\alpha)$ содержало множитель p принадлежащій функціи P.

Также легко выразить условія, что комплексное число $\varphi(\alpha)$ содержитъ идеальный множитель p принадлежащій функціи P λ разъ.

На основаніи сказаннаго въ n^0 46 мы заключаемъ, что въ этомъ случаѣ должно имѣть мѣсто сравненіе

$$\varphi(x)\,P(P_1P_2\ \ldots\ldots\ P_{k-1})^{\lambda+1} \equiv 0\ \left(\text{мод.}\ p^{\lambda+1},\ \frac{x^n-1}{x-1}\right), \tag{3}$$

а сравненіе

$$\varphi(x)\,P(P_1P_2\ \ldots\ldots\ P_{k-1})^{\lambda+2} \equiv 0\ \left(\text{мод.}\ p^{\lambda+2},\ \frac{x^n-1}{x-1}\right) \tag{4}$$

не должно удовлетворяться.

Замѣчая, что

$$\frac{x^n-1}{x-1} = PP_1\ \ldots\ldots\ P_{k-1} + p\psi(x),$$

гдѣ функцію ψx можно считать недѣлящеюся по модулю p ни на одну изъ функцій $P, P_1 \ldots\ldots P_{k-1}$ (n^0 43), мы можемъ представить сравненія (3) и (4) еще подъ такимъ видомъ:

$$-\psi(x)\,\varphi(x)\,(P_1P_2\ \ldots\ldots\ P_{k-1})^{\lambda} \equiv 0\ \left(\text{мод.}\ p^{\lambda},\ \frac{x^n-1}{x-1}\right)$$
$$-\psi(x)\,\varphi(x)\,(P_1P_2\ \ldots\ldots\ P_{k-1})^{\lambda+1} \equiv 0\ \left(\text{мод.}\ p^{\lambda+1},\ \frac{x^n-1}{x-1}\right).$$

Принимая во вниманіе, что $\psi(x)$ не дѣлится по модулю p ни на одну изъ функцій $P, P_1 \ldots P_{k-1}$, мы можемъ вмѣсто этихъ сравненій взять слѣдующія:

$$\text{I.}\qquad \varphi(x)\ W^{\lambda} \equiv 0\ \left(\text{мод.}\ p^{\lambda},\ \frac{x^n-1}{x-1}\right)$$
$$\text{II.}\qquad \varphi(x)\ W^{\lambda+1} \equiv 0\ \left(\text{мод.}\ p^{\lambda+1},\ \frac{x^n-1}{x-1}\right),$$

где $$W = P_1 P_2 \ldots . P_{k-1}.$$

Итакъ для того, чтобы комплексное число $\varphi(\alpha)$ содержало множитель p принадлежащій функціи P — λ разъ, необходимо и достаточно чтобы сравненіе (I) имѣло мѣсто, а сравненіе (II) нѣтъ.

Этотъ критеріумъ легко преобразовать въ другой, который былъ данъ Куммеромъ. Съ этою цѣлью найдемъ такую функцію періодовъ $\beta, \beta_1 \ldots . \beta_{k-1}$, которая содержала бы только одинъ идеальный множитель p принадлежащій напримѣръ функціи P и притомъ только одинъ разъ.

Въ n^0 19 было выведено сравненіе по модулю p и функціи P, которому удовлетворяютъ функціи

$$x,\ x^{g^k},\ x^{g^{2k}}, \ldots . x^{g^{(h-1)k}};$$

это сравненіе имѣетъ такой видъ:

$$x^h + l_1 x^{h-1} + \ldots . + l_h \equiv 0 \text{ (мод. } p,\ P),$$

гдѣ $l_1, l_2 \ldots . l_h$ суть числа цѣлыя.

Такъ какъ P есть простая функція по модулю p степени h, то

$$P \equiv x^h + l_1 x^{h-1} + \ldots . + l_h \text{ (мод. } p).$$

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что если въ выраженіи P замѣнить x послѣдовательно на

$$x^{g^k},\ x^{g^{2k}}, \ldots . x^{g^{(k-1)k}},$$

то полученныя функціи будутъ также дѣлиться на P по модулю p

Понятно, что тоже самое имѣетъ мѣсто и относительно другихъ функцій

$$P_1,\ P_2, \ldots . P_{k-1}.$$

Пусть теперь A и B будутъ двѣ функціи удовлетворяющія сравненію

(5) $$AP - BW \equiv 1 \text{ (мод. } p),$$

гдѣ опять $$W = P_1 P_2 \ldots . P_{k-1}.$$

Такъ какъ P и W не имѣютъ общихъ множителей по модулю p, то всегда найдутся функціи A и B удовлетворяющія сравненію (5). Это сравненіе можетъ быть еще написано въ видѣ

$$AP - BW = 1 + pf(x),$$

гдѣ $f(x)$ — полиномъ съ цѣлыми коеффиціентами.

Замѣняя въ обѣихъ частяхъ этого равенства x послѣдовательно на

$$x^{g^k},\ x^{g^{2k}}, \ldots . x^{g^{(h-1)k}}$$

и обозначая черезъ

$$\begin{array}{l} A',\ A'', \ldots . A^{(h-1)} \\ B',\ B'', \ldots . B^{(h-1)} \\ P',\ P'', \ldots . P^{(h-1)} \\ W',\ W'', \ldots . W^{(h-1)}, \end{array}$$

значенія функцій A, B, P, W соотвѣтствующія этимъ замѣщеніямъ, получимъ слѣдующія равенства:

$$A'P' - B'W' = 1 + pf(x^{g^k})$$
$$A''P'' - B''W'' = 1 + pf(x^{g^{2k}})$$

. . . .

Полагая

$$F(\eta) = AP + A'P' + A''P'' + \dots + A^{(k-1)}P^{(k-1)}$$
$$F_1(\eta) = BW + B'W' + B''W'' + \dots + B^{(k-1)}W^{(k-1)},$$

гдѣ правыя части этихъ равенствъ суть, очевидно, функціи періодовъ

$$\eta,\ \eta_1 \dots \eta_{k-1},$$

получимъ изъ предыдущихъ уравненій

(6) $$F(\eta) - F_1(\eta) \equiv h \text{ (мод. } p).$$

По замѣченному выше

$$P',\ P'', \dots$$

дѣлятся на P по модулю p; точно также

$$W',\ W'', \dots$$

дѣлятся на W по модулю p; поэтому функціи

$$F(\eta) \text{ и } F_1(\eta)$$

дѣлятся соотвѣтственно не P и W по модулю p. Изъ сравненія (6) видно, что $F(\eta)$ не дѣлится по модулю p ни на одну изъ функцій P_1, P_2, ... P_{k-1}. Поэтому комплексное число $F(\beta)$ содержитъ только идеальный множитель p принадлежащій функціи P. Если этотъ множитель содержится въ $F(\beta)$ болѣе одного раза, то мы возьмемъ комплексное число $F(\beta) + p$. Очевидно, что это число не содержитъ другихъ идеальныхъ множителей p кромѣ того, который принадлежитъ функціи P; далѣе, такъ какъ p содержитъ этотъ множитель въ первой степени, а $F(\beta)$ въ высшей, то сумма $F(\beta) + p$ будетъ содержать тотъ же множитель въ первой степени. Это можно повѣрить при помощи критеріума (I, II).

Итакъ всегда можно найти такое комплексное число $\Phi(\beta)$ которое будетъ содержать только одинъ идеальный множитель p или, другими словами, найти такую функцію періодовъ $\Phi(\eta)$, которая будетъ по модулю p представляться подъ видомъ

$$\Phi(\eta) \equiv P\varpi(x) \text{ (мод. } p),$$

гдѣ $\varpi(x)$ не дѣлится по модулю p ни на одну изъ функцій P, P_1 . . . . P_{k-1}.

Разсмотримъ теперь функцію

$$\Psi(\eta) = \Phi(\eta_1)\Phi(\eta_2) \dots \Phi(\eta_{k-1}).$$

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что $\Psi(\eta)$ по модулю p будетъ имѣть видъ

$$\Psi(\eta) \equiv W\Omega(x) \text{ (мод. } p),$$

гдѣ $\Omega(x)$ не дѣлится по модулю p ни на одну изъ функцій

$$P_1,\ P_2,\ \ldots\ P_{k-1}.$$

На основаніи доказаннаго въ n^0 47 мы можемъ въ критеріумѣ (I, II) W замѣнить на $W\Omega(x)$ и тогда сравненія (I) и (II) примутъ видъ

$$\varphi(x)\ [\Psi(\eta)]^{\lambda} \equiv 0 \left(\text{мод. } p^{\lambda},\ \frac{x^n-1}{x-1}\right)$$

$$\varphi(x)\ [\Psi(\eta)]^{\lambda+1} \equiv 0 \left(\text{мод. } p^{\lambda+1},\ \frac{x^n-1}{x-1}\right).$$

Итакъ, чтобы комплексное число $\varphi(\alpha)$ содержало множитель p принадлежащій функціи P необходимо и достаточно, чтобы комплексное число

$$\varphi(\alpha)\ [\Psi(\beta)]^{\lambda}$$

дѣлилось на p^{λ}, а комплексное число

$$\varphi(\alpha)\ [\Psi(\beta)]^{\lambda+1}$$

не дѣлилось на $p^{\lambda+1}$. Въ этомъ видѣ критеріумъ былъ данъ Куммеромъ.

Въ заключеніе этого n^0 замѣтимъ, что прилагая къ разбираемому нами случаю, въ которомъ всѣ функціи

$$P,\ P_1\ \ldots\ P_{k-1}$$

одной и той же степени h, то, что было доказано въ n^0 50 относительно нормы комплексныхъ чиселъ, получимъ слѣдующую теорему: *Если норма комплекснаго числа $\varphi(\alpha)$ дѣлится на простое число p, принадлежащее къ показателю h по модулю n, то она дѣлится на p^h.*

56.

Распредѣленіе идеальныхъ комплексныхъ чиселъ на классы [30].

Выше мы видѣли какимъ образомъ узнать дѣлится ли данное комплексное число на нѣкоторый простой идеальный множитель обыкновеннаго простаго числа и если дѣлится то на какую степень его. Теперь мы ближе разсмотримъ эти условія. Пусть опять

$$F(x) = 0$$

будетъ основное уравненіе и p нѣкоторое простое число. Положимъ, какъ въ n^0 45, что

$$F(x) = V^m V_1^{m_1}\ \ldots\ V_s^{m_s} + pF_1(x),$$

гдѣ $V,\ V_1\ \ldots\ V_s$ различныя простыя функціи по модулю p степеней $\nu,\ \nu_1\ \ldots\ \upsilon_s$ и $F_1(x)$ функція не дѣлящаяся по модулю p ни на одну изъ функцій $V,\ V_1\ \ldots\ V_s$. Кромѣ того предполагается, что коеффиціенты при высшихъ степеняхъ x въ функціяхъ $V,\ V_1\ \ldots\ V_s$ равны единицѣ.

Если данное комплексное число $f(x_0)$ содержитъ множители p принадлежащаго функціи V, то функція $f(x)$ должна имѣть по модулю p такой видъ:

$$f(x) = \varphi(x)\ V + p\psi(x),$$

гдѣ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ суть полиномы съ цѣлыми коеффиціентами.

Итакъ, если $f(x)$ содержитъ идеальный множитель p принадлежащій функціи V, то всѣ коэффиціенты остатка степени $\nu - 1$, который получится отъ раздѣленія $f(x)$ на V должны дѣлиться на p. Изображая этотъ остатокъ черезъ

$$A_0x^{\nu-1} + A_1x^{\nu-2} + \ldots\ldots + A_{\nu-1},$$

мы найдемъ сравненія

$$(1) \qquad A_0 \equiv 0,\ A_1 \equiv 0,\ \ldots\ldots A_{\nu-1} \equiv (\text{мод. } p).$$

Очевидно, что $A_0, A_1, \ldots\ldots A_{\nu-1}$ суть линейныя однородныя функціи коэффиціентовъ даннаго комплекснаго числа $f(x_0)$. Обратно, если сравненія (1) удовлетворяются, то $f(x)$ дѣлится на V по модулю p и, слѣдовательно, $f(x_0)$ содержитъ идеальный множитель p, принадлежащій функціи V. Итакъ условія необходимыя и достаточныя для того, чтобы комплексное число $f(x_0)$ дѣлилось на идеальный множитель p принадлежащій функціи V выражаются ν сравненіями по модулю p, содержащими линейнымъ образомъ коэффиціенты функціи $f(x)$. Положимъ теперь, что $f(x_0)$ дѣлится на квадратъ идеальнаго множителя p принадлежащаго функціи V. Въ этомъ случаѣ $f(x_0)$ дѣлится также и на первую степень этого множителя, а потому можно положить

$$(2) \qquad f(x) = \varphi(x)\ V + p\psi(x).$$

Поэтому коэффиціенты $f(x)$ должны удовлетворять ν линейнымъ сравненіямъ (1). Условіе, что $f(x_0)$ дѣлится на квадратъ идеальнаго множителя p принадлежащаго функціи V выражается, какъ мы видѣли (n^0 46), сравненіемъ

$$f(x)\ V^{m-2}W \equiv 0\ (\text{мод. } p,\ F(x)),$$

гдѣ

$$W = V_1^{m_1}V_2^{m_2} \ldots\ldots V_s^{m_s}.$$

Это въ случаѣ $m \geqq 2$. Внося въ это сравненіе вмѣсто $f(x)$ ея выраженіе по формулѣ (2), получимъ

$$\varphi(x)\ V^{m-1}W \equiv 0\ (\text{мод. } p,\ F(x))$$

и, слѣдовательно, $\varphi(x_0)$ содержитъ множитель p принадлежащій функціи V. Обратно, если $\varphi(x_0)$ дѣлится на этого множителя, то $f(x_0)$ дѣлится на квадратъ его. Условіе, что $\varphi(x_0)$ дѣлится на множитель p принадлежащій функціи V даетъ намъ ν сравненій по модулю p линейныхъ относительно коэффиціентовъ $\varphi(x)$, а слѣдовательно, и относительно коэффиціентовъ $f(x)$. Итакъ всего мы будемъ имѣть въ этомъ случаѣ 2ν сравненій линейныхъ относительно коэффиціентовъ $f(x)$.

Положимъ теперь $m = 1$. Чтобы $f(x_0)$ дѣлилось на квадратъ идеальнаго множителя p, принадлежащаго функціи V, необходимо и достаточно условіе

$$(3) \qquad f(x)\ W^2 \equiv 0\ (\text{мод. } p^2,\ F(x)).$$

Внося сюда вмѣсто $f(x)$ ея выраженіе (2), получимъ

$$[\varphi(x)\ VW + p\psi(x)W]\ W \equiv 0\ (\text{мод. } p^2,\ F(x)).$$

Замѣчая, что

$$F(x) = VW + pF_1(x),$$

имѣемъ $$p[\varphi(x)\ F_1(x) - \psi(x)\ W]\ W \equiv 0\ (\text{мод. } p^2,\ F(x))$$
и, слѣдовательно,

(4) $$[\varphi(x)\ F_1(x) - \psi(x)\ W]\ W \equiv 0\ (\text{мод. } p,\ F(x)).$$

Обратно изъ сравненія (4) получается (3). Сравненіе (4) показываетъ, что функція

$$\varphi(x)\ F_1(x) - \psi(x)\ W$$

дѣлится на V по модулю p. Отсюда получается ν сравненій по модулю p линейныхъ относительно коеффиціентовъ $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ или, что все равно, линейныхъ относительно коеффиціентовъ $f(x)$. Кромѣ того уравненіе (2) даетъ тоже ν сравненій по модулю p. Итакъ и въ этомъ случаѣ мы будемъ также имѣть $2n$ сравненій по модулю p, линейныхъ относительно коеффиціентовъ $f(x)$.

Докажемъ теперь вообще, что условія необходимыя и достаточныя для того, чтобы комплексное число $f(x_0)$ дѣлилось на степень λ идеальнаго множителя p, принадлежащаго функціи V, выражаются $\lambda\nu$ сравненіями по модулю p линейными относительно коеффиціентовъ $f(x)$.

Положимъ, что это предложеніе доказано для всѣхъ значеній λ отъ 1 до $\sigma - 1$ и докажемъ, что оно будетъ имѣть мѣсто и для $\lambda = \sigma$. Такъ какъ предложеніе оказывается вѣрнымъ для $\lambda = 1$, то оно будетъ вѣрно вообще.

Во первыхъ замѣтимъ, что если число $f(x_0)$ дѣлится на множителя p принадлежащаго функціи V, то

$$f(x) = \varphi(x)\ V + p\psi(x).$$

Это равенство даетъ намъ ν сравненій по модулю p линейныхъ относительно коеффиціентовъ $f(x)$. Далѣе мы знаемъ, что если $f(x_0)$ дѣлится на степень σ множителя p принадлежащаго функціи V и $\sigma = km + r\ (r < m)$, то должно имѣть мѣсто сравненіе

(5) $$f(x)\ V^{m-r}\,W^{k+1} \equiv 0\ (\text{мод. } p^{k+1},\ F(x)).$$

Отсюда, замѣняя $f(x)$ ея выраженіемъ, находимъ

$$\varphi(x)\ V^{m-r+1}\,W^{k+1} + p\psi(x)\ V^{m-r}\,W^{k+1} \equiv 0\ (\text{мод. } p^{k+1},\ E(x)).$$

Умножая обѣ части этого сравненія на $E_1(x)$ и внося вмѣсто pE_1x величину

$$F(x) - V^m W,$$

получимъ

(6) $$|\varphi(x)\ F_1(x) - \psi(x)\ V^{m-1}\,W|\ V^{m-r+1}\,W^{k+1} \equiv 0\ (\text{мод. } p^{k+1},\ F(x)).$$

Обратно если имѣетъ мѣсто сравненіе (6), то имѣетъ мѣсто и (5). Изъ (6) видно, что комплексное число

$$\varphi(x_0)\ F_1(x_0) - \psi(x_0)\ V^{m-1}(x_0)\ W(x_0),$$

содержащее коеффиціенты $f(x)$ линейнымъ образомъ, дѣлится на $\sigma - 1$-ю степень множителя p принадлежащаго функціи V. Это намъ даетъ по предположенію $(\sigma - 1)\ \nu$ сравненій по модулю p линейныхъ относительно коеффиціентовъ $f(x)$. Эти сравненія вмѣстѣ съ прежними ν сравненіями составляютъ всего $\sigma\nu$ сравненій, что мы и хотѣли доказать.

57.

Такъ какъ идеальныя комплексныя числа играютъ такую же роль въ теоріи комплексныхъ чиселъ какъ и существующія, то мы будемъ означать ихъ также какъ и существующія

$$f(x_0),\ \varphi(x_0),\ \psi(x_0).$$

Пусть $f(x_0)$ будетъ какое нибудь идеальное комплексное число равное произведенію нѣкоторыхъ простыхъ идеальныхъ множителей обыкновенныхъ простыхъ чиселъ q, q' .... Положимъ, что относительно этихъ чиселъ q, q' .... основная функція $F(x)$ имѣетъ такой видъ:

$$F(x) = V^m V_1^m \ldots . V_s^{m_s} + qF_1(x)$$
$$F(x) = U^{\mu} U_1^{\mu_1} \ldots . U_l^{\mu_l} + q' F_2(x)$$

и т. д.

гдѣ V, V_1 .... V_s простыя функціи по модулю q степеней ν, ν_1 .... ν_s; U, U_1 .... U_l простыя функціи по модулю q' степеней ν', ν'_1.... ν_l' и т. д. Примемъ, что $f(x_0)$ состоитъ изъ

λ множителей q принадлежащихъ V

λ_1 . . . . q . . . . . . V_1

. . . .

λ_s . . . . q . . . . . . V_s

λ' . . . . q' . . . . . . U

λ'_1 . . . . q' . . . . . . U_1

. . . .

λ_l' . . . . q' . . . . . . U_l

и т. д

Положимъ

$$M = \lambda\nu + \lambda_1\nu_1 + \ldots . + \lambda_s\nu_s$$
$$M' = \lambda'\nu' + \lambda'_1\nu'_1 + \ldots . + \lambda_l'\nu_l'$$

и т. д.

Мы будемъ называть идеальное число $f_1(x_0)$ *союзнымъ* съ $f(x_0)$, если оно состоитъ изъ

mM — λ множителей q принадлежащихъ V

m_1M — λ_1 . . . . q . . . . . . V_1

. . . .

m_sM — λ_s . . . . q . . . . . . V_s

$\mu M'$ — λ' . . . . q' . . . . . . U

μ_1M' — λ'_1 . . . q' . . . . . . U_1

. . . .

μ_lM' — λ_l' . . . . q' . . . . . . U_l

и т. д.

Изъ доказаннаго въ n^0 50 слѣдуетъ, что для чиселъ существующихъ это опредѣленіе союзныхъ чиселъ не находится въ противорѣчіи съ тѣмъ, которое было дано выше. Произведеніе комплексныхъ чиселъ $f(x_0)$ и $f_1(x_0)$ можно принять равнымъ $\pm q^M q'^{M'} \ldots$ Это произведеніе мы будемъ называть *нормою идеальнаго числа* $f(x_0)$.

Такъ что норма всякаго идеальнаго числа будетъ число вещественное.

Ясно, что можно найти безчисленное множество существующихъ комплексныхъ чиселъ $\Phi(x_0)$ дѣлящихся на $f(x_0)$. Другими словами можно найти безчисленное множество идеальныхъ чиселъ такихъ, что $f(x_0)$ умноженное на какое нибудь изъ нихъ даетъ въ произведеніи существующее комплексное число. Если мы выберемъ изъ этихъ идеальныхъ множителей тотъ, норма котораго будетъ по возможности меньше, то придемъ къ весьма замѣчательному результату, что достаточно конечнаго числа идеальныхъ множителей, чтобы обратить въ существующія всевозможныя идеальныя числа. Чтобы доказать это, положимъ, что $f(x_0)$ будетъ идеальное комплексное число, множителей котораго мы назначили выше, $\Phi(x_0)$ существующее комплексное число дѣлящееся на $f(x_0)$. Для того чтобы $F(x_0)$ дѣлилось на $f(x_0)$ необходимо и достаточно, какъ извѣстно, чтобы $\Phi(x_0)$ дѣлилось на тѣ идеальные простые множители, изъ которыхъ составлено $f(x_0)$ и на каждый множитель въ степени не меньше той въ которой онъ входитъ въ $f(x_0)$.

И такъ $\Phi(x_0)$ должно содержать λ идеальныхъ множителей q принадлежащихъ V, λ_1 множителей принадлежащихъ функціи V_1 и т. д. Это выражается $M = \lambda\nu + \lambda_1\nu_1 \ldots \lambda_s\nu_s$ сравненіями по модулю q. Если назовемъ черезъ $A_0, A_1 \ldots A_{n-1}$ коеффиціенты $\Phi(x)$, предполагая, что она имѣетъ видъ

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_{n-1}x^{n-1}$$

то найдемъ, что каждое сравненіе будетъ вида

$$a_0A_0 + a_1A_1 + \ldots + a_{n-1}A_{n-1} \equiv 0 \text{ (мод. } q).$$

Точно также мы получимъ $M' = \lambda'\nu' + \lambda'_1\nu'_1 + \ldots$ сравненій по модулю q' такого же вида и т. д. Сообщимъ теперь коеффиціентамъ $A_0, A_1 \ldots A_{n-1}$ всѣ цѣлыя значенія отъ 0 до $L - 1$ включительно, гдѣ L нѣкоторое цѣлое число. Мы получимъ всего L^n различныхъ системъ значеній этихъ коеффиціентовъ. Такъ какъ существуетъ только q различныхъ цѣлыхъ чиселъ не сравнимыхъ между собою по модулю q, только q' различныхъ цѣлыхъ чиселъ не сравнимыхъ между собою по модулю q' и т. д., то вся система линейныхъ функцій разсматриваемыхъ здѣсь можетъ имѣть только $q^M q'^{M'} \ldots$ различныхъ совокупностей вычетовъ по соотвѣтствующимъ модулямъ. Если мы теперь возьмемъ число L столь большимъ, что число всѣхъ этихъ совокупностей вычетовъ линейныхъ функцій будетъ меньше числа системъ значеній всѣхъ коеффиціентовъ т. е. если $q^M q'^{M'} \ldots < L^n$, то всѣмъ различнымъ соединеніямъ значеній всѣхъ коеффиціентовъ $A_0, A_1 \ldots A_{n-1}$ не могутъ принадлежать все различныя системы вычетовъ линейныхъ функцій. Нѣкоторыя изъ системъ вычетовъ непремѣнно должны повториться. Пусть теперь одинаковыя системы вычетовъ получаются при двухъ системахъ значеній коеффиціентовъ

$$A_0 = b_0,\ A_1 = b_1 \ldots A_{n-1} = b_{n-1}$$

$$A_0 = c_0,\ A_1 = c_1 \ldots A_{n-1} = c_{n-1}.$$

Тогда, взявъ систему значеній

$$A_0 = b_0 - c_0,\ A_1 = b_1 - c_1 \ldots . A_{n-1} = b_{n-1} - c_{n-1},$$

которыя всѣ будутъ по численной величинѣ меньше L, найдемъ, что всѣ функціи будутъ сравнимы съ нулемъ. Такъ что между всѣми комплексными числами, коэффиціенты которыхъ не превосходятъ по численной величинѣ $L - 1$, всегда найдется число $\Phi(x_0)$ дѣлящееся на $f(x_0)$, если

$$L^n > q^M q'^{M'} \ldots . = Nf(x_0).$$

Пусть $$x_0,\ x_1 \ldots . x_{k-1}$$

будутъ вещественные корни уравненія

$$F(x) = 0$$

и $$(x_k,\ x_h),\ (x_{k+1}.\ x_{h+1}),\ \ldots . (x_{k-1},\ x_{n-1})$$

пары мнимыхъ сопряженныхъ корней.

Составимъ квадратичную форму относительно коэффиціентовъ числа $\Phi(x_0)$

$$\begin{aligned}&\Phi^2(x_0) + \Phi^2(x_1) + \ldots . + \Phi^2(x_{k-1})\\ &\quad + 2\Phi(x_k)\ \Phi(x_h) + 2\Phi(x_{k-1})\ \Phi(x_{h-1}) + \ldots .\\ &\quad = \Sigma g_{\lambda,\mu} A_\lambda A_\mu,\end{aligned}$$

гдѣ $$g_{\lambda,\mu} = g_{\mu,\lambda}.$$

Эта форма имѣетъ положительныя значенія при всѣхъ вещественныхъ значеніяхъ

$$A_0,\ A_1 \ldots . A_{n-1}.$$

Называя теперь черезъ G наибольшій, по численной величинѣ, изъ коэффиціентовъ

$$g_{0,0},\ g_{1,1} \ldots . 2g_{0,1},\ 2g_{0,2} \ldots .$$

и допуская, что всѣ коэффиціенты A_0, $A_1 \ldots . A_{n-1}$ не превосходятъ $L - 1$, мы найдемъ, что

$$\Phi^2(x_0) + \Phi^2(x_1) + \ldots + \Phi^2(x_{k-1}) + 2\Phi(x_k)\ \Phi(x_h) + \ldots . < \frac{n(n+1)}{1.2}.G(L-1)^2.$$

Такъ какъ, кромѣ того, среднее ариѳметическое положительныхъ количествъ

$$\Phi^2(x_0),\ \Phi^2(x_1) \ldots . \Phi^2(x_{k-1}),\ \Phi(x_k)\ \Phi(x_h),\ \Phi(x_k)\ \Phi(x_h),\ \Phi(x_{k+1})\ \Phi(x_{h+1}) \ldots .$$

всегда не меньше средняго геометрическаго, то будетъ имѣть мѣсто неравенство

$$\sqrt[n]{\Phi^2(x_0)\ \Phi^2(x_1) \ldots . \Phi^2(x_{k-1})\ \Phi^2(x_k)\ \Phi^2(x_h) \ldots .} < \frac{n+1}{2} g(L-1)^2$$

т. е. $$N\Phi(x_0) < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} g^{\frac{n}{2}}.\ (L-1)^n$$

Число L, удовлетворяющее неравенству $L^n > Nf(x_0)$, можно выбрать такъ, что $(L - 1)^n$ будетъ меньше $Nf(x_0)$, и слѣдовательно

$$(\alpha) \qquad N\Phi(x_0) < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} g^{\frac{n}{2}} Nf(x_0) \text{ (*)}$$

Такъ какъ $\Phi(x_0)$ дѣлится на $f(x_0)$, то можно положить

$$\Phi(x_0) = f(x_0)\ \varphi(x_0),$$

гдѣ $\varphi(x_0)$ идеальное комплексное число. Изъ равенства

$$N\Phi(x_0) = Nf(x_0)\ .\ N\varphi(x_0)$$

на основаніи соотношенія (α) находимъ

$$N\varphi(x_0) < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} g^{\frac{n}{2}}.$$

Итакъ идеальные множители обращающіе въ существующія комплексныя числа какія угодно идеальныя числа можно выбрать такъ, что ихъ нормы будутъ меньше опредѣленнаго числа. Замѣчая, что существуетъ только конечное число идеальныхъ чиселъ, нормы которыхъ не превосходятъ даннаго конечнаго числа, мы получаемъ слѣдующее предложеніе:

Теорема. *Всегда можно найти конечное число идеальныхъ чиселъ такихъ, что произведеніе одного изъ нихъ и какого угодно идеальнаго числа будетъ существующимъ комплекснымъ числомъ.*

Изъ этого предложенія получаются совершенно такія же слѣдствія, какія вывелъ Куммеръ разсматривая комплексныя числа зависящія отъ корней изъ единицы.

58.

Множители, которые обращаютъ въ существующія всѣ идеальныя числа, позволяютъ намъ распредѣлить эти числа на классы при помощи слѣдующаго опредѣленія:

Всѣ комплексныя идеальныя числа дающія по умноженіи на одно и тоже идеальное число существующія комплексныя числа мы будемъ называть *равносильными* или *эквивалентными* идеальными числами. Онѣ будутъ составлять одинъ и тотъ же классъ комплексныхъ идеальныхъ чиселъ. Въ ту же классификацію мы включаемъ и всѣ существующія комплексныя числа, которыя сами по себѣ будутъ составлять одинъ классъ, называемый *главнымъ*.

Прежде всего мы замѣтимъ, что произведеніе идеальнаго числа на существующее не можетъ быть существующимъ комплекснымъ числомъ, такъ какъ въ противномъ случаѣ отношеніе двухъ существующихъ чиселъ было бы идеальнымъ числомъ.

Теорема. *Всякій идеальный множитель p обращающій въ существующее комплексное число нѣкоторое идеальное число, обращаетъ также и всѣ эквивалентныя этому идеальныя числа въ существующія комплексныя числа.*

(*) Здѣсь мы беремъ численныя величины нормъ.

Доказат. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $f(x_0)$ и $g(x_0)$ будутъ два эквивалентныя идеальныя числа. Въ такомъ случаѣ долженъ существовать множитель $M(x_0)$, который разомъ обращаетъ оба числа fx_0 и gx_0 въ существующія комплексныя числа. Пусть кромѣ того $M_1(x_0)$ будетъ другой множитель, который обращаетъ fx_0 въ существующее комплексное число. Такъ что произведенія

$$f(x_0)\ M(x_0),\ g(x_0)\ M(x_0),\ f(x_0)\ M_1(x_0)$$

будутъ существующія комплексныя числа. Перемноживъ два послѣднія и раздѣливъ на первое должны получить существующее комплексное число. Это же частное равно $g(x_0)\ M_1(x_0)$; слѣд. $gx_0M_1x_0$ есть существующее комплексное число. Такъ что каждый множитель, обращающій въ существующее комплексное число какое нибудь идеальное число, обращаетъ также и всѣ эквивалентныя ему числа въ существующія. Отсюда слѣдуетъ, что *классификація идеальныхъ чиселъ независитъ отъ случайнаго выбора множителей.*

59.

Два идеальныя числа эквивалентныя порознь третьему эквивалентны между собою.

Дѣйствительно, тотъ идеальный множитель, который обращаетъ первое и третье число въ существующія комплексныя числа долженъ также обратить и второе, потому что оно эквивалентно третьему.

Эквивалентныя идеальныя числа умноженныя на эквивалентныя даютъ эквивалентныя произведенія.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $f(x_0)$ и $g(x_0)$ будутъ эквивалентныя идеальныя числа, $M(x_0)$ соотвѣтствующій имъ множитель, а $f_1(x_0)$ и $g_1(x_0)$ другія эквивалентныя идеальныя числа, которымъ соотвѣтствуетъ множитель $M_1(x_0)$ тогда $fx_0f_1x_0$ и $gx_0g_1x_0$ будутъ также эквивалентныя числа, потому что множитель $Mx_0M_1x_0$ обратитъ и то и другое въ существующее комплексное число.

Изъ всего того, что мы сказали, слѣдуетъ, что *всѣ идеальныя числа распредѣляются въ опредѣленное и конечное число классовъ, такъ что каждое идеальное число относится къ одному опредѣленному классу.*

60.

Пусть $f(x_0)$ будетъ какое нибудь идеальное число. Составляемъ рядъ чиселъ

$$f(x_0),\ f^2(x_0),\ f^3(x_0)\ \ldots\ .$$

который можно продолжать какъ угодно далеко. Такъ какъ число классовъ идеальныхъ чиселъ конечное, то всѣ числа предыдущаго ряда не могутъ относиться къ различнымъ классамъ. Пусть $f^r(x_0)$ и $f^s(x_0)$ будутъ два эквивалентныя числа; r предполагается больше s. Тогда будетъ существовать множитель $M(x_0)$ при которомъ оба произведенія $f^r(x_0)M(x_0)$ и $f^s(x_0)M(x_0)$ будутъ существующія комплексныя числа, а слѣдовательно и ихъ частное $f^{r-s}(x_0)$ будетъ существующимъ комплекснымъ числомъ т. е. *каждое идеальное число возвышеніемъ въ нѣкоторую цѣлую степень можно обратить въ существующее* или иначе: *каждое идеальное число можно представить какъ корень изъ существующаго.*

Пусть h будетъ наименьшій показатель при которомъ $f^h(x_0)$ будетъ существующимъ числомъ. Тогда, какъ легко видѣть, h чиселъ

$$(1)\qquad 1,\ f(x_0),\ f^2(x_0)\ .\ .\ .\ .\ f^{h-1}(x_0)$$

будутъ относиться къ различнымъ классамъ Если эти h классовъ не изчерпываютъ всѣхъ классовъ, то пусть gx_0 будетъ идеальное число неэквивалентное ни одному изъ предыдущихъ.

Тогда, какъ легко показать, числа

$$(2)\qquad gx_0\ gx_0f(x_0),\ gx_0f^2(x_0)\ .\ .\ .\ .\ gx_0f^{h-1}(x_0)$$

неэквивалентны между собою и неэквивалентны числамъ (1). Если эти $2h$ классовъ не изчерпываютъ всѣхъ классовъ, то пусть $h(x_0)$ будетъ число неэквивалентное ни одному изъ предыдущихъ. Тогда легко показать, что числа

$$(3)\qquad hx_0,\ hx_0f(x_0),\ hx_0f^2(x_0)\ .\ .\ .\ .\ hx_0f^{h-1}(x_0)$$

неэквивалентны между собою и неэквивалентны числамъ (1) и (2). Такъ что число классовъ или равно $3h$ или больше. Продолжая тѣ же сужденія найдемъ, что число классовъ будетъ кратнымъ h.

Показатель наименьшей степени какого нибудь идеальнаго числа равной существующему числу есть всегда дѣлитель числа классовъ идеальныхъ чиселъ.

ГЛАВА IV.

Приложеніе теоріи комплексныхъ чиселъ къ одному вопросу интегральнаго исчисленія.

61.

Въ этой главѣ мы приложимъ изложенную выше теорію комплексныхъ чиселъ къ рѣшенію такого вопроса:

Узнать при помощи конечнаго числа дѣйствій можно ли подобрать въ дифференціалѣ

$$\frac{(x + A)dx}{\sqrt{x^4 + \gamma x^3 + \delta x^2 + \varepsilon x + \zeta}},$$

гдѣ γ, δ, ε, ζ *нѣкоторые вещественные коеффиціенты, параметръ* A *такимъ образомъ, чтобы этотъ дифференціалъ интегрировался въ логариѳмахъ.*

Разсматриваемый дифференціалъ заключается въ общемъ видѣ

$$\frac{\rho dx}{\sqrt{Rx}},$$

гдѣ Rx и ρ суть цѣлыя функціи, степени которыхъ соотвѣтственно равны $2n$ и $n - 1$. Этотъ послѣдній дифференціалъ былъ изслѣдованъ Абелемъ въ его извѣстномъ мемуарѣ: «*Sur l'intégration de la formule differentielle* $\frac{\rho dx}{\sqrt{Rx}}$, *$R$ et ρ étant des fonctions entières*«.

Тамъ Абель доказалъ слѣдующую замѣчательную теорему [34].

Если интегралъ

$$\int \frac{\rho dx}{\sqrt{Rx}}$$

выражается въ логариѳмахъ въ видѣ

$$A\log\frac{p+q\sqrt{Rx}}{p-q\sqrt{Rx}},$$

гдѣ p и q цѣлыя функціи x, то $\sqrt{Rx}$ разлагается въ періодическую непрерывную дробь и обратно, если $\sqrt{Rx}$ разлагается въ періодическую непрерывную дробь, то всегда можно найти такую цѣлую функцію ρ, что дифференціалъ

$$\frac{\rho dx}{\sqrt{Rx}}$$

будетъ интегрироваться въ логариѳмахъ. Кромѣ того Абелю принадлежитъ теорема:

Если интегралъ

$$\int\frac{\rho dx}{\sqrt{Rx}}$$

выражается логариѳмами, то онъ представляется подъ видомъ

$$C\log(P+Q\sqrt{Rx})$$

гдѣ C нѣкоторая постоянная, а P и Q цѣлыя функціи x, удовлетворяющія уравненію

$$P^2 - Q^2 \, . \, Rx = \text{постоян.}$$

Не смотря на все значеніе упомянутыхъ изслѣдованій Абеля для анализа слѣдуетъ всетаки замѣтить, что онѣ прямо не даютъ желаемаго критеріума для того, чтобы узнать выражается ли въ логариѳмахъ нѣкоторый данный дифференціалъ вида

$$\frac{\rho dx}{\sqrt{Rx}};$$

потому что какъ бы мы много не вычислили неполныхъ частныхъ непрерывной дроби, въ которую разлагается $\sqrt{Rx}$, мы никогда не можемъ сказать, что періодичность не обнаружится далѣе.

До сихъ поръ мы не имѣемъ относительно общаго дифференціала

$$\frac{\rho dx}{\sqrt{Rx}}$$

такого критеріума, при помощи котораго можно было бы рѣшить, послѣ конечнаго ряда дѣйствій, интегрируется ли этотъ дифференціалъ въ логариѳмахъ.

Для частнаго случая, когда Rx есть полиномъ 4-й степени съ раціональными коэффиціентами, замѣчательный критеріумъ этого рода былъ данъ академикомъ Чебышевымъ[32]. Въ своей запискѣ помѣщенной въ бюллетенѣ Академіи Наукъ, Чебышевъ изложилъ методу интегрированія дифференціала

$$\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x^4+\gamma x^3+\delta x^2+\varepsilon x+\zeta}},$$

гдѣ γ, δ, ε, ζ раціональныя числа.

По этой методѣ получается интегралъ этого выраженія всякій разъ, когда онъ возможенъ въ логариѳмахъ; въ противномъ случаѣ обнаруживается невозможность такого интегрированія. Эта записка Чебышева была перепечатана съ нѣкоторыми дополненіями въ журналѣ Ліувилля

Я доказалъ эту методу въ своей статьѣ «Sur la méthode d'intégration de M. Tchebycheff». Тамъ я пользовался условіями интегрируемости дифференціала

$$(1) \qquad \frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x^4 + \gamma x^3 + \delta x^2 + \varepsilon x + \zeta}}$$

въ логариѳмахъ отличными отъ условія даннаго Абелемъ. При этихъ условіяхъ ясно обнаруживается связь задачи объ интегрированіи этого дифференціала въ логариѳмахъ съ задачею дѣленія эллиптическихъ функцій. Условія интегрируемости, о которыхъ мы говоримъ, были даны Вейерштрассомъ для общаго случая. когда разсматривается интегралъ отъ раціональной функціи x и квадратнаго радикала изъ полинома 4-й степени [35]. Такъ какъ въ настоящее время уравненія дѣленія эллиптическихъ функцій изслѣдованы очень хорошо, то упомянутая связь оказывается весьма полезною. Мы уже сказали, что метода Чебышева была предложена для того случая, когда γ, δ, ε, ζ — раціональныя числа.

При помощи изложенной выше теоріи комплексныхъ чиселъ, мнѣ удалось рѣшить вопросъ объ интегрируемости дифференціала (1) въ логариѳмахъ и для того случая, когда γ, δ, ε, ζ — какія нибудь вещественныя числа. Мы не разсматриваемъ въ этомъ сочиненіи только тотъ случай, въ которомъ коэффиціенты γ, δ, ε ζ зависятъ отъ корней уравненій исключенныхъ нами въ III-й главѣ.

Мы считаемъ не лишнимъ замѣтить здѣсь еще слѣдующее:

Вопросъ объ интегрированіи алгебраическихъ дифференціаловъ въ логариѳмахъ былъ поставленъ Абелемъ. За классическими работами Абеля въ этомъ направленіи идутъ работы Ліувилля, Чебышева, Вейерштрасса и друг. Этихъ изысканій не слѣдуетъ смѣшивать съ изысканіями въ другомъ родѣ по тому же вопросу, принадлежащими Вейерштрассу, Клебшу и друг. [36]. Цѣль этихъ новыхъ изслѣдованій можно выразить слѣдующимъ образомъ:

Для опредѣленія

$$\int y dx$$

въ логариѳмахъ, гдѣ y есть алгебраическая функція x т. е. корень алгебраическаго уравненія

$$f(x, y) = 0,$$

(f означаетъ цѣлую функцію) требуется x и y выразить раціональными функціями новой перемѣнной. При этомъ ищется какимъ условіямъ должна удовлетворять функція $f(x, y)$, чтобы подобныя выраженія x и y существовали. Понятно, что когда x и y выразятся раціонально черезъ новую перемѣнную, тогда

$$\int y dx$$

найдется при помощи алгебраическихъ функцій и логариѳмовъ. Но обратнаго заключенія сдѣлать нельзя т. е. $\int ydx$ можетъ выражаться въ логариѳмахъ, а x и y могутъ въ тоже время и не быть раціональными функціями одной перемѣнной.

62.

Мы начнемъ съ того, что приведемъ данный дифференціалъ

$$\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x^4+\gamma x^3+\delta x^2+\varepsilon x+\zeta}}$$

гдѣ γ, δ, ε, ζ — нѣкоторыя вещественныя величины къ виду

$$\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}.$$

Вещественные параметры α и β можно принять, какъ мы увидимъ, такими, что будутъ имѣть мѣсто неравенства

$$1<\alpha<\beta.$$

Если всѣ корни уравненія

$$x^4+\gamma x^3+\delta x^2+\varepsilon x+\zeta=0$$

вещественные, то, назвавъ ихъ по порядку величинъ черезъ

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,$$

такъ что

$$x_0<x_1<x_2<x_3$$

или

$$x_0>x_1>x_2>x_3,$$

мы можемъ проще всего привести данный дифференціалъ къ желаемому виду подстановкою

$$z=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}.$$

При этомъ получимъ

$$x^4+\gamma x^3+\delta x^2+\varepsilon x+\zeta=(x_1-x_0)^4\,z(z-1)(z-\alpha)(z-\beta),$$

гдѣ

$$\alpha=\frac{x_2-x_0}{x_1-x_0},\ \beta=\frac{x_3-x_0}{x_1-x_0}.$$

Допуская, что между корнями x_0, x_1, x_2, x_3 нѣтъ равныхъ (случай равныхъ корней можно исключить), найдемъ, что

$$\beta>\alpha>1.$$

Кромѣ того имѣемъ

$$x+A=(x_1-x_0)(z+B),$$

гдѣ

$$B=\frac{A+x_0}{x_1-x_0};$$

$$dx=(x_1-x_0)\,dz;$$

слѣдовательно

$$\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x^4+\gamma x^3+\delta x^2+\varepsilon x+\zeta}}=\frac{(z+B)\,dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\alpha)(z-\beta)}}.$$

63.

Если не всѣ корни уравненія

$$x^4 + \gamma x^3 + \delta x^2 + \varepsilon x + \zeta = 0$$

дѣйствительные, то можно достигнуть желаемой формы дифференціала другими преобразованіями. Съ этою цѣлью мы воспользуемся преобразованіями играющими существенную роль въ самой методѣ интегрированія, которую мы намѣрены здѣсь изложить

Предположимъ, какъ дѣлаетъ Якоби [37], что перемѣнныя x и z связаны уравненіемъ

$$(1)\qquad (ax^2 + 2bx + c)\, z^2 + 2(a'x^2 + 2b'x + c')\, z + a''x^2 + 2b''x + c'' = 0$$

или, что все равно, уравненіемъ

$$(2)\qquad (az^2 + 2a'z + a'')\, x^2 + 2(bz^2 + 2b'z + b'')\, x + (cz^2 + 2c'z + c'') = 0.$$

Полагая

$$(a'x^2 + 2b'x + c')^2 - (ax^2 + 2bx + c)\,(a''x^2 + 2b''x + c'') = R(x)$$

$$(bz^2 + 2b'z + b'')^2 - (az^2 + 2a'z + a'')\,(cz^2 + 2c'z + c'') = R_1(z),$$

мы получимъ изъ предыдущихъ уравненій (1) и (2)

$$(3)\qquad z = \frac{-(a'x^2 + 2b'x + c') \pm \sqrt{R(x)}}{ax^2 + 2bx + c}$$

$$(4)\qquad x = \frac{-(bz^2 + 2b'z + b'') \pm \sqrt{R_1(z)}}{az^2 + 2a'z + a''}.$$

Дифференцируя уравненіе (1), находимъ

$$\left\{ (ax^2 + 2bx + c)z + (a'x^2 + 2b'x + c') \right\} dz + \left\{ (az^2 + 2a'z + a'')x + (bz^2 + 2b'z + b'') \right\} dx = 0.$$

Изъ выраженій x и z выводимъ

$$(ax^2 + 2bx + c)\quad z + (a'x^2 + 2b'x + c') = \pm\sqrt{R_1(z)}$$

$$(az^2 + 2a'z + a'')\, x + (bz^2 + 2b'z + b'') = \pm\sqrt{R(x)};$$

слѣдовательно

$$\frac{dz}{\sqrt{R_1(z)}} = \pm \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

При помощи уравненія (1) можно преобразовать дифференціалъ

$$\frac{dx}{\sqrt{x^4 + \gamma x^3 + \delta x^2 + \varepsilon x + \zeta}}$$

въ такой

$$\frac{dz}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}},$$

въ которомъ полиномъ, стоящій подъ радикаломъ дѣлится на z. Съ этою цѣлью опредѣлимъ постоянныя

a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' такъ, чтобы $R(x)$ выходилъ равнымъ $x^4+\gamma x^3+\delta x^2+\varepsilon x+\zeta$ и чтобы $R_1(z)$ былъ вида $z^4+lz^3+mz^2+nz$.

При этомъ получаются слѣдующія уравненія:

$$a'^2-aa''=1,\ 4a'b'-2ab''-2a''b=\gamma,$$
$$4b'^2+2a'c'-ac''-ca''-4bb''=\delta,$$
$$4b'c'-2bc''-2b''c=\varepsilon,\ c'^2-cc''=\zeta,$$
$$b^2-ac=1,\ b''^2-a''c''=0.$$

Такъ какъ у насъ здѣсь только семь уравненій для опредѣленія девяти количествъ $a,b,c..$, то мы можемъ два изъ нихъ назначить произвольно. Для того, чтобы получить по возможности простое преобразованіе, положимъ

$$a=0,\ a''=0.$$

Въ такомъ случаѣ изъ предыдущихъ уравненій выводимъ

$$b''=0,\ a'=\pm 1,\ b=\pm 1.$$

Чтобы получить то преобразованіе, которое было дано Чебышевымъ, примемъ

$$a'=1,\ b=-1.$$

Изъ тѣхъ же уравненій получимъ

$$b'=\frac{\gamma}{4},\ c'=\frac{1}{2}\left(\delta-\frac{\gamma^2}{4}\right),\ c''=\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\gamma}{4}\left(\delta-\frac{\gamma^2}{4}\right),$$
$$c=-\frac{\frac{1}{4}\left(\delta-\frac{\gamma^2}{4}\right)^2-\zeta}{\frac{\gamma}{4}\left(\delta-\frac{\gamma^2}{4}\right)-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Сравнивая коэффиціенты одинаковыхъ степеней въ $R_1(z)$ и $z^4+lz^3+mz^2+nz$, находимъ

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} l&=-\gamma-\frac{(4\delta-\gamma^2)^2-64\zeta}{2\gamma^3-8\gamma\delta+16\varepsilon},\\ m&=-2\delta+\frac{3}{4}\gamma^2,\\ n&=-\varepsilon+\frac{1}{2}\gamma\delta-\frac{1}{8}\gamma^3.\end{aligned}\right.$$

Что касается до знаковъ передъ радикалами въ формулахъ (3) и (4), то мы возьмемъ въ первой знакъ —, а во второй +.

Поэтому

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} z&=\frac{x^2+\frac{\gamma}{2}x+\frac{4\delta-\gamma^2}{8}+\sqrt{x^4+\gamma x^3+\delta x^2+\varepsilon x+\zeta}}{2x+\frac{\frac{1}{4}\left(\delta-\frac{\gamma^2}{4}\right)^2-\zeta}{\frac{\gamma}{4}\left(\delta-\frac{\gamma^2}{4}\right)-\frac{\varepsilon}{2}}}\\ x&=\frac{z^2-\frac{\gamma}{2}z+\sqrt{z^4+lz^3+mz^2+nz}}{2z}.\end{aligned}\right.$$

Эти выраженія по предыдущему приводятъ насъ къ слѣдующимъ равенствамъ:

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + \gamma x^3 + \delta x^2 + \varepsilon x + \zeta}} &= \frac{dz}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}} \\ \frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x^4 + \gamma x^3 + \delta x^2 + \varepsilon x + \zeta}} &= \frac{1}{2}\,\frac{\left(z - \frac{\gamma}{2} + 2A\right)dz}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}} + \frac{1}{2}\,\frac{dz}{z}. \end{aligned} \right.$$

Это то самое преобразованіе, которымъ пользуется Чебышевъ въ своемъ мемуарѣ.

Очевидно, что крайней мѣрѣ два корня уравненія

$$z^4 + lz^3 + mz^2 + nz = 0$$

будутъ дѣйствительные.

Если въ этомъ уравненіи совсѣмъ не будетъ мнимыхъ корней, то можно употребить преобразованіе n^0 62, чтобы получить дифференціалъ

$$\frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x(x - 1)(x - \alpha)(x - \beta)}}.$$

64.

Если же въ уравненіи

$$z^4 + lz^3 + mz^2 + nz = 0$$

два корня будутъ мнимые, то мы сдѣлаемъ еще одно преобразованіе, чтобы достигнуть полинома, у котораго всѣ корни будутъ вещественные. Пусть вещественный корень уравненія

$$z^3 + lz^2 + mz + n = 0$$

будетъ $- p$. Положимъ

$$z^3 + lz^2 + mz + n = (z + p)\,(z^2 + rz + s).$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ корни уравненія

$$z^2 + rz + s = 0$$

будутъ мнимые, слѣдовательно $r^2 - 4s < 0$. Въ этомъ случаѣ для преобразованія дифференціала

$$\frac{(z + B)\,dz}{\sqrt{(z + p)(z^2 + rz + s)}}$$

мы воспользуемся подстановкою

$$(1)\qquad z_1 = \frac{(p - r)^2\,(z^2 + pz)}{(r - p)\,z + s},$$

которая не имѣетъ смысла только тогда, когда $p = r$. Если это послѣднее условіе выполнено, то данный дифференціалъ интегрируется непосредственно въ логариѳмахъ. Дѣйствительно, положивъ $B = \frac{1}{2}\,p$, имѣемъ

$$\int \frac{(z + \frac{1}{2}\,p)\,dz}{\sqrt{z(z + p)(z^2 + pz + s)}} = \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{z^2 + pz} + \sqrt{z^2 + pz + s}}{\sqrt{z^2 + pz} - \sqrt{z^2 + pz + s}} + \text{постоян.}$$

Изъ равенства (1) имѣемъ

$$z^2 + pz = z_1 \cdot \frac{(r-p)z+s}{(p-r)^2}$$

$$z^2 + rz + s = \frac{[z_1 + (p-r)^2] \cdot [(r-p)z+s]}{(p-r)^2};$$

слѣдовательно

$$\sqrt{(z^2+pz)(z^2+rz+s)} = \frac{[(r-p)z+s]\sqrt{z_1(z_1+(p-r)^2)}}{(p-r)^2}. \tag{2}$$

Кромѣ того изъ уравненія (1) получаемъ

$$(p-r)z = -\frac{p(p-r)+z_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{p(p-r)+z_1}{2}\right)^2 + sz_1}.$$

Здѣсь взять передъ радикаломъ знакъ — для того, чтобы имѣть ту величину z, которая обращается въ $\pm\infty$, при $z_1 = \infty$.

Изъ (1) дифференцированіемъ находимъ

$$\frac{(r-p)\,dz}{(r-p)z+s} = \frac{dz_1}{\sqrt{(p(p-r)+z_1)^2+4sz_1}}$$

$$\frac{(r-p)^2(z+A)\,dz}{(r-p)z+s} = \frac{1}{2}\,\frac{p(p-r)+z_1+2A(r-p)}{\sqrt{(p(p-r)+z_1)^2+4sz_1}}\,dz_1 + \tfrac{1}{2}\,dz_1;$$

слѣдовательно на основаніи (2) имѣемъ

$$\frac{dz}{\sqrt{(z^2+pz)(z^2+rz+s)}} = \frac{(r-p)\,dz_1}{\sqrt{z_1(z_1+(p-r)^2)(p(p-r)+z_1)^2+4sz_1)}} \tag{3}$$

$$\frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{(z^2+pz)(z^2+rz+s)}} = \frac{1}{2}\,\frac{(z_1+p(p-r)+2A(r-p))\,dz_1}{\sqrt{z_1(z_1+(p-r)^2)\,[(z_1+(p-r)p)^2+4sz_1]}} \tag{4}$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{dz_1}{\sqrt{z_1(z_1+(p-r)^2)}}.$$

Поэтому

$$\int\frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{z^2+pz)(z^2+rz+s)}} = \frac{1}{2}\int\frac{z_1+p(p-r)+2A(r-p)}{\sqrt{z_1(z_1+(p-r)^2)\,[(z_1+(p-r)p)^2+4sz_1}}\,dz_1$$

$$+\log(\sqrt{z_1}+\sqrt{z_1+(p-r)^2}).$$

Замѣчая, что корни уравненія

$$(z_1+p(p-r))^2+4sz_1 = 0$$

представляются формулою

$$-p(p-r)-2s\pm\sqrt{4s(p^2-pr+s)},$$

мы можемъ показать, что они вещественные. Дѣйствительно, изъ неравенства

$$r^2-4s<0$$

получаются такія:

$$s > 0$$

$$p^2 - pr + s = \left(p - \frac{r}{2}\right)^2 + \frac{4s - r^2}{4} > 0.$$

Итакъ въ преобразованномъ дифференціалѣ

$$\frac{z_1 + p(p - r) + 2A(r - p)}{\sqrt{z_1(z_1 + (p - r)^2)\left[(z_1 + (p - r)p)^2 + 4sz_1\right]}}\, dz_1$$

у полинома стоящаго подъ радикаломъ всѣ корни вещественные, а такой дифференціалъ, какъ было показано выше, всегда легко приводится къ виду

$$\frac{(x + A)\, dx}{\sqrt{x(x - 1)(x - \alpha)(x - \beta)}}.$$

Параметры α и β удовлетворяютъ неравенствамъ

$$1 < \alpha < \beta.$$

65.

Интегралъ

$$\int \frac{(x + A)\, dx}{\sqrt{x(x - 1)(x - \alpha)(x - \beta)}}$$

можно привести къ обыкновенному каноническому виду и выразить въ эллиптическихъ функціяхъ.

Полагая

(1)
$$x = \frac{sn^2(u, k)}{sn^2(u, k) - sn^2(a, k)},$$

гдѣ

$$sn^2a = \frac{\beta - 1}{\beta},\ k^2 = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha -}{\beta - 1}$$

и, слѣдовательно,

$$\alpha = \frac{1}{dn^2a},\ \beta = \frac{1}{cn^2a},$$

получимъ

(2)
$$\sqrt{x(x - 1)(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{sn^3a}{cna\, dna} \frac{snu\, cnu\, dnu}{(sn^2u - sn^2a)^2}$$

$$dx = -\frac{2sn^2a\, snu\, cnu\, dnu\, du}{(sn^2u - sn^2a)^2}.$$

Изъ этихъ выраженій находимъ

$$\frac{dx}{\sqrt{x(x - 1)(x - \alpha)(x - \beta)}} = -2 \cdot \frac{cna\, dna}{sna}\, du$$

$$x + A = A + 1 + \frac{sn^2a}{sn^2u - sn^2a}.$$

Поэтому имѣемъ

$$\frac{(x + A)\, dx}{\sqrt{x(x - 1)(x - \alpha)(x - \beta)}} = -2(A + 1)\frac{cna\, dna\, du}{sna} - 2\frac{cna\, sna\, dna\, du}{sn^2u - sn^2a}$$

$$(3)\qquad \int_0^x \frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}} = -2\left[\frac{(A+1)\,cna\,dna}{sna} + \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\right]u + \log\frac{H(a-u)}{H(a+u)},$$

гдѣ Θ и H — извѣстныя функціи Якоби.

66.

Выше было показано приведеніе даннаго дифференціала къ виду

$$\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}.$$

Теперь мы изслѣдуемъ во что обращается этотъ дифференціалъ, если его снова преобразовывать по формуламъ (7) n^0 63 и (4) n^0 64. Сначала разсмотримъ дифференціалъ

$$\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x(x-g)(x-g')(x-g'')}} = \frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x^4+lx^3+mx^2+nx}},$$

гдѣ g, g', g'' суть корни полинома

$$x^3 + lx^2 + mx + n.$$

По второй изъ формулъ (7) n^0 63 получимъ

$$\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x^4+lx^3+mx^2+nx}} = \frac{1}{2}\,\frac{\left(z-\frac{l}{2}+2A\right)dx}{\sqrt{z^4+l_1z^3+m_1z^2+n_1z}} + \frac{1}{2}\,\frac{dz}{z}.$$

По формуламъ (5) того же n^0 находимъ слѣдующія выраженія для коеффиціентовъ l_1, m_1, n_1:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} l_1 &= -\,l - \frac{(l^2-4m)^2}{2l^3-8lm+16n}\\ m_1 &= -\,2m + \tfrac{3}{4}l^2\\ n_1 &= -\,n + \tfrac{1}{2}lm - \tfrac{1}{8}l^3.\end{aligned}\right.$$

Обозначивъ далѣе черезъ g_1, g'_1, g_1'' корни уравненія

$$z^3 + l_1z^2 + m_1z^2 + n_1 = 0,$$

мы можемъ легко показать, что между g_1, g_1', g_1'' и g, g', g'' существуетъ слѣдующая зависимость:

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} g_1 &= \frac{(g+g'-g'')(g+g''-g')}{2(g'+g''-g)}\\ g_1' &= \frac{(g+g'-g'')(g'+g''-g)}{2(g+g''-g')}\\ g_1'' &= \frac{(g+g''-g')(g''+g'-g)}{2(g+g'-g'')}.\end{aligned}\right.$$

Мы докажемъ обратно, что изъ этихъ формулъ выводятся формулы (1).

Дѣйствительно, перемножая эти выраженія получимъ

$$g_1 g_1' g_1'' = \tfrac{1}{8}(g + g' - g'')\,(g + g'' - g')\,(g' + g'' - g).$$

Но

$$g + g' + g'' = -l,\quad g_1 g_1' g_1'' = -n_1;$$

слѣдовательно

$$-n_1 = \left(-\frac{l}{2} - g\right)\left(-\frac{l}{2} - g'\right)\left(-\frac{l}{2} - g''\right)$$

$$= n - \tfrac{1}{2}lm + \tfrac{1}{8}l^3.$$

Это третья изъ формулъ (1).

Далѣе имѣемъ

$$\begin{aligned} m_1 &= g_1 g_1' + g_1 g_1'' + g_1' g_1'' \\ &= \tfrac{1}{4}(g' + g'' - g)^2 + \tfrac{1}{4}(g + g'' - g')^2 + \tfrac{1}{4}(g + g' - g'')^2 \\ &= -2m + \tfrac{3}{4}l^2 \end{aligned}$$

т. е. вторую формулу (1).

Наконецъ, складывая формулы (2), получимъ

$$-l_1 = \frac{(g + g' - g'')^2 (g + g'' - g')^2 + (g'' + g - g')^2 (g' + g'' - g)^2 + (g' + g'' - g)^2 (g + g' - g'')^2}{2(g' + g'' - g)(g + g'' - g')(g' + g - g'')}$$

и, слѣдовательно,

$$l_1 n_1 = \left(-\frac{l}{2} - g''\right)^2\left(-\frac{l}{2} - g'\right)^2 + \left(-\frac{l}{2} - g'\right)^2\left(-\frac{l}{2} - g\right)^2 + \left(-\frac{l}{2} - g\right)^2\left(-\frac{l}{2} - g''\right)^2.$$

Вторая часть этого уравненія есть цѣлая раціональная симметрическая функція корней g, g', g''. Выразивъ ее въ коеффиціентахъ l, m, n, найдемъ

$$l_1 n_1 = (m - \tfrac{1}{4}l^2)^2 + l(n - \tfrac{1}{2}ml + \tfrac{1}{8}l^3);$$

слѣдовательно

$$l_1 = -l - \frac{(l^2 - 4m)^2}{2l^3 - 8lm + 16n}$$

Это первая изъ формулъ (1).

Если допустимъ, что g, g', g'' суть положительныя величины удовлетворяющія неравенствамъ

(3) $$g < g' < g'',$$

то на основаніи сказаннаго въ n^0 62 дифференціалъ

$$\frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x(x - g)(x - g')(x - g'')}}$$

можетъ быть приведенъ къ виду

$$\frac{(x + A_1)\,dx}{\sqrt{x(x - 1)(x - \alpha)(x - \beta)}},$$

гдѣ

$$\alpha = \frac{g'}{g},\ \beta = \frac{g''}{g}$$

и A_1 — новая постоянная величина.

Замѣчая кромѣ того, что, въ предположеніи неравенствъ (3), численныя величины количествъ

$$g + g' - g'',\ g + g'' - g',\ g' + g'' - g$$

удовлетворяютъ неравенствамъ

$$g + g' - g'' < g + g'' - g' < g' + g'' - g$$

мы заключаемъ, что и величины g_1, g_1', g_1'' будутъ, по численной величинѣ, удовлетворять неравенствамъ

$$g_1 < g_1' < g_1''$$

и, слѣдовательно, дифференціалъ

$$\frac{(z + B)\,dz}{\sqrt{z^4 + l_1 z^3 + m_1 z^2 + n_1 z}}$$

можетъ быть преобразованъ въ такой:

$$\frac{(z + B_1)\,dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\alpha_1)(z-\beta_1)}},$$

гдѣ

$$\alpha_1 = \frac{g_1'}{g_1} = \left(\frac{g' + g'' - g}{g + g'' - g'}\right)^2 = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{1 + \beta - \alpha}\right)^2$$

$$\beta_1 = \frac{g_1''}{g_1} = \left(\frac{g' + g'' - g}{g + g' - g''}\right)^2 = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{1 + \alpha - \beta}\right)^2.$$

Замѣтимъ еще случай, когда $g + g' = g''$. Представляя полиномъ $x^4 + kx^3 + mx^2 + nx$ подъ видомъ

$$x(x - g'')\,(x^2 + rx + s),$$

мы найдемъ что $r = -g''$ и, слѣдовательно, интегралъ

$$\int \frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x(x - g'')(x^2 + rx + s)}}$$

найдется въ логариѳмахъ непосредственно (64), если примемъ $A = -\frac{1}{2}g''$.

Итакъ мы видимъ, что дифференціалъ

$$\frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}$$

съ параметрами α и β можетъ быть преобразованъ въ дифференціалъ

$$\frac{(z + B)\,dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\alpha_1)(z-\beta_1)}},$$

гдѣ

$$\alpha_1 = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{1 + \beta - \alpha}\right)^2$$

$$\beta_1 = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{1 + \alpha - \beta}\right)^2.$$

Чтобы получить это преобразованіе надобно въ уравненіи между x и z, показанномъ въ n^0 63, посредствомъ котораго дифференціалъ

$$\frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x^4 + lx^3 + mx^2 + nx}}$$

преобразовывается въ

$$\frac{(z + B)\,dz}{\sqrt{z^4 + l_1 z^3 + m_1 z^2 + n_1 z}},$$

замѣнить x на gx, а z на $g_1 z$

67.

Чтобы найти зависимость между x и z въ эллиптическихъ функціяхъ, приведемъ оба интеграла

$$\int \frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x(x - 1)(x - \alpha)(x - \beta)}}, \quad \int \frac{(z + B)\,dz}{\sqrt{z(z - 1)(z - \alpha_1)(z - \beta_1)}}$$

къ каноническому виду. Что касается перваго изъ нихъ, то это приведеніе было сдѣлано въ $n^0$65; теперь займемся только вторымъ

Для приведенія этого интеграла служитъ подстановка

$$z = \frac{sn^2(v, \lambda)}{sn^2(v, \lambda) - sn^2(b, \lambda)},$$

гдѣ

(1) $$sn^2 b = \frac{\beta_1 - 1}{\beta_1}, \quad \lambda^2 = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_1 - 1}{\beta_1 - 1};$$

слѣдовательно

$$\alpha_1 = \frac{1}{dn^2(b, \lambda)} = \frac{1}{dn^2 b}, \quad \beta_1 = \frac{1}{cn^2 b}.$$

Внося вмѣсто β_1 и α_1 ихъ выраженія

$$\alpha_1 = \left(\frac{\beta + \alpha - 1}{1 + \beta - \alpha}\right)^2, \quad \beta_1 = \left(\frac{\beta + \alpha - 1}{1 + \alpha - \beta}\right)^2$$

и замѣчая, что при этомъ

$$\frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1} = \frac{4\beta(\alpha - 1)}{(\beta + \alpha - 1)^2}, \quad \frac{\beta_1 - 1}{\beta_1} = \frac{4\alpha(\beta - 1)}{(\beta + \alpha - 1)^2},$$

получимъ

$$\lambda^2 = \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1} : \frac{\beta_1 - 1}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha - 1}{\beta - 1} = k^2$$

и, слѣдовательно, можно принять $\lambda = k$.

Далѣе, внося въ предыдущую формулу для $\frac{\beta_1 - 1}{\beta_1}$ вмѣсто β и α выраженія $\frac{1}{cn^2 a}$ и $\frac{1}{dn^2 a}$, получимъ

$$sn^2 b = \frac{\beta_1 - 1}{\beta_1} = \frac{4sn^2 a\, cn^2 a\, dn^2 a}{(1 - k^2 sn^4 a)^2} = sn^2 2a;$$

слѣдовательно можно принять $b = 2a$ т. е. при разсматриваемомъ преобразованіи модуль k не измѣняется, а аргументъ a удвоивается. Зависимость между x и z можно выразить въ эллиптическихъ функціяхъ слѣдующимъ образомъ:

Согласно преобразованію n^0 63 имѣемъ

$$\frac{dx}{\sqrt{x^4 + lx^3 + mx^2 + nx}} = \frac{dz}{\sqrt{z^4 + l_1 z^3 + m_1 z^2 + n_1 z}}.$$

Откуда, перемѣняя x на gx и z на $g_1 z$, получимъ

$$\frac{dx}{g\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}} = \frac{dz}{g_1\sqrt{z(z-1)(z-\alpha_1)(z-\beta)}}.$$

Вводя сюда эллиптическіе аргументы u и v, найдемъ (n^0 65)

(3) $$\frac{cna\, dna}{g\, sna}\, du = \frac{cn2a\, dn2a}{g_1\, sn2a}\, dv.$$

Съ другой стороны мы имѣемъ

$$g_1 = \frac{(g + g' - g'')(g + g'' - g')}{2(g'' + g' - g)}.$$

Такъ какъ

$$\frac{g'}{g} = \alpha, \quad \frac{g''}{g} = \beta,$$

то

$$\frac{g_1}{g} = \frac{(1 + \alpha - \beta)(1 + \beta - \alpha)}{2(\alpha + \beta - 1)}.$$

Внося сюда вмѣсто α и β ихъ выраженія $\frac{1}{dn^2 a}$, $\frac{1}{cn^2 a}$, найдемъ

$$\frac{g_1}{g} = \frac{cn2a\, dn2a\, sna}{cna\, dna\, sn2a}.$$

Слѣдовательно уравненіе (3) принимаетъ видъ

$$du = dv;$$

откуда

$$v = u + c,$$

гдѣ c постоянное.

Для опредѣленія постоянной c замѣтимъ, что по формуламъ (6) n^0 63 выходитъ $x = \infty$, при $z = 0$; слѣдовательно при $v = 0$, $u = \pm a$, и поэтому $c = \mp a$. Такъ какъ a опредѣляется по уравненію

$$sn^2 a = \frac{\beta - 1}{\beta},$$

и, слѣдовательно, знакъ a остается неопредѣленнымъ, то можно положить $c = a$ т. е.

$$v = u + a.$$

Итакъ x и z выражаются черезъ одну перемѣнную u такимъ образомъ:

$$x = \frac{sn^2 u}{sn^2 u - sn^2 a}, \quad z = \frac{sn^2(u+a)}{sn^2(u+a) - sn^2(2a)}.$$

68.

Теперь мы примѣнимъ къ дифференціалу

$$\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}$$

преобразованіе n^0 64.

Сначала разсмотримъ опять болѣе общій дифференціалъ

$$(1) \qquad \frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x(x-g)(x-g')(x-g'')}}.$$

Представляя подрадикальный полиномъ въ видѣ

$$x(x+p)\,(x^2+rx+s),$$

можемъ положить

$$p = -g'', \; r = -(g+g'), \; s = g'g.$$

По формулѣ (4) n^0 64 сведемъ интегрированіе дифференціала (1) къ интегрированію такого:

$$\frac{(z+B)\,dz}{\sqrt{z(z+(p-r)^2)((p(p-r)+z)^2+4sz)}}.$$

Обозначивъ черезъ h количество $-(p-r)^2$, а черезъ h' и h'' корни уравненія

$$(p(p-r)+z)^2+4sz = 0,$$

мы будемъ имѣть

$$\begin{aligned}
h &= -(p-r)^2 = -(g+g'-g'')^2,\\
h' &= -p(p-r) - 2s + 2\sqrt{s(p^2-pr+s)}\\
&= g''(g+g'-g'') - 2g'g + 2\sqrt{gg'(g''-g)(g''-g')}\\
h'' &= -p(p-r) - 2s - 2\sqrt{s(p^2-pr+s)}\\
&= g''(g+g'-g'') - 2g'g - 2\sqrt{gg'(g''-g)(g'-g')}.
\end{aligned}$$

Если

$$g'' > g' > g > 0$$

то, какъ легко видѣть, h, h', h'' будутъ отрицательныя и ихъ численныя величины (h), (h'), (h'') будутъ удовлетворять неравенствамъ

$$(h) < (h') < (h'').$$

Дѣйствительно, такъ какъ

$$g''(g + g' - g'') - 2gg' = -(g'' - g)(g'' - g') - gg' < 0,$$

то h и h'' очевидно отрицательныя величины.

Кромѣ того замѣчая, что

$$[g''(g + g' - g'') - 2gg']^2 = [(g'' - g)(g'' - g') + gg']^2 > 4gg'(g'' - g)(g'' - g'),$$

мы убѣждаемся также, что и величина h' — отрицательная.

Разность

$$\begin{aligned} h - h' &= -(g + g' - g'')^2 - g''(g + g' - g'') + 2g'g - 2\sqrt{gg'(g'' - g)(g'' - g')}. \\ &= g(g'' - g) + g'(g'' - g') - 2\sqrt{gg'(g'' - g)(g'' - g')} \end{aligned}$$

есть величина положительная, потому что она равна

$$(\sqrt{g(g'' - g)} - \sqrt{g'(g'' - g')})^2$$

Итакъ численная величина h' болѣе численной величины h, а h'', очевидно, больше h' по численной величинѣ.

Дифференціалъ

$$\frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x(x - g)(x - g')(x - g'')}}$$

можетъ быть легко преобразованъ (n^0 62) въ такой:

$$\frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x(x - 1)(x - \alpha)(x - \beta)}},$$

гдѣ

$$\alpha = \frac{g'}{g},\ \beta = \frac{g''}{g}$$

и постоянная A отличается отъ прежней, а дифференціалъ

$$\frac{(z + B)\,dz}{\sqrt{z(z - h)(z - h')(z - h'')}}$$

въ такой:

$$\frac{(z + B)\,dz}{\sqrt{z(z - 1)(z - \xi)(z - \eta)}},$$

гдѣ

$$\xi = \frac{h'}{h} = \left(\frac{\sqrt{(g'' - g)(g'' - g')} - \sqrt{gg'}}{g + g' - g''}\right)^2$$

$$\eta = \frac{h''}{h} = \left(\frac{\sqrt{(g'' - g)(g'' - g')} + \sqrt{gg'}}{g + g' - g''}\right)^2;$$

слѣдовательно

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \left(\frac{\sqrt{(\beta-\alpha)(\beta-1)}-\sqrt{\alpha}}{1+\alpha-\beta}\right)^2 \\ \eta &= \left(\frac{\sqrt{(\beta-\alpha)(\beta-1)}+\sqrt{\alpha}}{1+\alpha-\beta}\right)^2. \end{aligned} \right.$$

Итакъ мы видимъ, что интегрированіе дифференціала

$$\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}$$

можетъ быть сведено къ интегрированію дифференціала

$$\frac{(z+B)\,dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\xi)(z-\eta)}},$$

гдѣ ξ и η выражаются по формуламъ (2).

Зависимость между x и z получится, если въ уравненіи между x и z въ n^0 64 (тамъ вмѣсто z слѣдуетъ поставить x и вмѣсто z_1 — z), при помощи котораго дифференціалъ

$$\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x(x-g)(x-g')(x-g'')}}$$

преобразуется въ дифференціалъ

$$\frac{(z+B)\,dz}{\sqrt{z(z-h)(z-h')(z-h'')}}$$

перемѣнить x на gx и z на hz.

69.

Туже зависимость между x и z можно выразить въ эллиптическихъ функціяхъ.

Положимъ съ этою цѣлью, какъ и прежде,

$$(1)\qquad x = \frac{sn^2(u, k)}{sn^2(u, k) - sn^2(a, k)}$$

$$sn^2(a, k) = \frac{\beta-1}{\beta},\quad k^2 = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha-1}{\beta-1};$$

слѣдовательно

$$\alpha = \frac{1}{dn^2(a, k)},\quad \beta = \frac{1}{cn^2(a, k)}.$$

Точно также примемъ, что

$$(2)\qquad z = \frac{sn^2(v, \lambda)}{sn^2(v, \lambda) - sn^2(b, \lambda)}$$

$$sn^2(b, \lambda) = \frac{\eta-1}{\eta},\quad \lambda^2 = \frac{\eta}{\xi}\cdot\frac{\xi-1}{\eta-1};$$

слѣдовательно

$$\xi = \frac{1}{dn^2(b, \lambda)},\quad \eta = \frac{1}{cn^2(b, \lambda)}.$$

При помощи формулъ, выведенныхъ въ предыдущемъ n^0, получимъ

$$\frac{\xi - 1}{\xi} = \frac{\left(\sqrt{(\beta - \alpha)(\beta - 1)} - \sqrt{\alpha}\right)^2 - (1 + \alpha - \beta)^2}{\left(\sqrt{(\beta - \alpha)(\beta - 1)} - \sqrt{\alpha}\right)^2}$$

$$\frac{\eta - 1}{\eta} = \frac{\left(\sqrt{(\beta - \alpha)(\beta - 1)} + \sqrt{\alpha}\right)^2 - (1 + \alpha - \beta)^2}{\left(\sqrt{(\beta - \alpha)(3 - 1)} + \sqrt{\alpha}\right)^2}$$

$$\lambda^2 = \frac{\xi - 1}{\xi} : \frac{\eta - 1}{\eta} = \frac{\beta^2 - \left(\sqrt{(\beta - 1)(\beta - \alpha)} + \sqrt{\alpha}\right)^2}{\beta^2 - \left(\sqrt{(\beta - 1)(\beta - \alpha)} - \sqrt{\alpha}\right)^2}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{\beta - \alpha} - \sqrt{\alpha(\beta - 1)}}{\sqrt{\beta - \alpha} + \sqrt{\alpha(\beta - 1)}}\right)^2.$$

Такъ какъ

$$k^2 = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha - 1}{\beta - 1},$$

то

$$k'^2 = 1 - k^2 = \frac{\beta - \alpha}{\alpha(\beta - 1)};$$

слѣдовательно

$$\lambda^2 = \left(\frac{1 - k'}{1 + k'}\right)^2$$

и

$$\lambda = \frac{1 - k'}{1 + k'}.$$

$$\lambda' = \sqrt{1 - \lambda^2} = \frac{2\sqrt{k'}}{1 + k'}.$$

Изъ уравненія (n^0 64)

$$\frac{dx}{\sqrt{x(x + p)(x + rx + s)}} = \frac{(r - p)\,dz}{\sqrt{z(z + p - r)^2)[(p(p - r) + z)^2 + 4sz]}},$$

полагая

$$p = - g'', \; r = - (g + g'), \; s = gg'$$

и перемѣняя x на gx, z на hz, получимъ

$$\frac{dx}{g\sqrt{x(x - 1)(x - \alpha)(x - \beta)}} = \frac{-(g + g' - g'')\,dz}{h\sqrt{(z - 1)(z - \xi)(z - \eta)}}.$$

Внося сюда величины x и z по формуламъ (1) и (2), найдемъ

$$\frac{du}{\sqrt{g'(g'' - g)}} = \frac{(g'' - g - g')\,dv}{\sqrt{h'(h'' - h)}}.$$

Такъ какъ

$$\sqrt{- h'} = \sqrt{(g'' - g)(g'' - g')} - \sqrt{gg'}$$

$$\sqrt{h - h''} = \sqrt{g(g'' - g)} + \sqrt{g'(g'' - g')},$$

то

$$\sqrt{h'(h'' - h)} = (g'' - g - g')\left(\sqrt{g(g'' - g')} + \sqrt{g'(g'' - g)}\right);$$

слѣдовательно

$$dv = \left(1 + \sqrt{\frac{g(g'' - g')}{g'(g'' - g)}}\right) du = (1 + k')\, du.$$

Поэтому

$$v = (1 + k')\, u + \text{постоян.}$$

Замѣчая (n^0 64), что при $x = 0$, $z = 0$ т. е. что при $u = 0$, $v = 0$, имѣемъ

$$v = (1 + k')\, u.$$

Кромѣ того, такъ какъ при $x = \infty$, $z = \infty$, то можно принять $v = b$, при $u = a$; слѣдовательно

$$b = (1 + k')\, a.$$

Итакъ x и z выражаются черезъ перемѣнную u по формуламъ

$$x = \frac{sn^2 u}{sn^2 u - sn^2 a}$$

$$z = \frac{sn^2\left((1 + k')\, u, \dfrac{1 - k'}{1 + k'}\right)}{sn^2\left((1 + k')\, u, \dfrac{1 - k'}{1 + k'}\right) - sn^2\left((1 + k')\, a, \dfrac{1 - k'}{1 + k'}\right)}$$

т. е. чтобы перейдти отъ x къ z надобно къ snu и sna приложить преобразованіе Ландена.

70.

Переходя теперь къ выводу условій интегрируемости дифференціала

$$\frac{(x + A)\, dx}{\sqrt{x(x - 1)(x - \alpha)(x - \beta)}}$$

въ логариѳмахъ, мы напомнимъ, что интегралъ

$$\int \frac{(x + A)\, dx}{\sqrt{x(x - 1)(x - \alpha)(x - \beta)}}$$

если онъ выражается въ логариѳмахъ, будетъ имѣть видъ

$$C \log(P + Q\sqrt{x(x - 1)(x - \alpha)(x - \beta)}),$$

гдѣ P и Q цѣлыя функціи удовлетворяющія уравненію

$$P^2 - Q^2\, x(x - 1)(x - \alpha)(x - \beta) = \text{постоян.}$$

Степень функціи P, очевидно, будетъ больше на двѣ единицы степени Q. Положимъ, что эти степени соотвѣтственно равны λ и $\lambda - 2$. Если функцію Q взять съ такимъ знакомъ, чтобы сумма

$$P + Q\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)},$$

по разложеніи по низходящимъ степенямъ x, начиналась съ члена Bx^{λ}, гдѣ B—нѣкоторый коэффиціентъ, то постоянная C будетъ равна, какъ мы увидимъ, $\frac{1}{\lambda}$. Дѣйствительно, разложеніе функціи

$$\frac{x+A}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}$$

начинается съ члена $\frac{1}{x}$; слѣдовательно разложеніе интеграла

$$\int\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}$$

съ члена $\log x$. Съ другой стороны разложеніе функціи

$$C\log(P+Q\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}),$$

по замѣченному выше, начинается съ члена $C\lambda\log x$; слѣдовательно $C\lambda=1$; $C=\frac{1}{\lambda}$.

Итакъ въ томъ случаѣ, когда интегралъ

$$\int\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}$$

выражается въ логариѳмахъ, онъ найдется по формулѣ

$$(1)\qquad \lambda\int\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}} = \log(P+Q\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}),$$

гдѣ P и Q цѣлыя функціи степеней λ и $\lambda - 2$, удовлетворяющія уравненію

$$P^2 - Q^2\,x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta) = \text{постоян.}$$

Чтобы найти для этого случая зависимость между параметрами α и β въ эллиптическихъ функціяхъ, мы воспользуемся формулою n^0 65. Изображая величину

$$-2\left[(A+1)\frac{cna\,dna}{sna}+\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\right]$$

черезъ M, мы имѣемъ на основаніи этой формулы и формулы (1) такое равенство:

$$(2)\qquad \lambda Mu + \lambda\log\frac{H(a+u)}{H(a-u)} = \log(P+Q\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}).$$

Для опредѣленія постоянныхъ a и M замѣтимъ, что x не измѣняется при измѣненіи u на $2K$ и $2K'i$ и слѣдовательно не измѣняется отъ прибавленія къ u величины $2mK + 2m'K'i$, гдѣ m и m' означаютъ какія нибудь цѣлыя числа, а K и $K'i$ полные эллиптическіе аргументы.

При такомъ измѣненіи и вторая часть уравненія (2) можетъ получить только приращеніе $2s\pi i$, гдѣ s цѣлое число; слѣдовательно

$$(3)\qquad \lambda M(2mK + 2m'K'i) + \lambda \log\frac{H(a+u+2mK+2m'K'i)}{H(a-u-2mK-2m'K'i)} - \lambda \log\frac{H(a+u)}{H(a-u)} = 2s\pi i.$$

Съ другой стороны имѣемъ извѣстныя равенства

$$H(u+2m'K'i) = (-1)^{m'}\, H(u)\, e^{\frac{-\pi i m'}{K}(u+m'K'i)}$$

$$H(u+2mK) \quad = (-1)^{m}\, H(u)$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{H(u+a+2mK+2m'K'i)}{H(a-u-2mK-2m'K'i)} = \frac{H(a+u)}{H(a-u)}\, e^{\frac{-2\pi i m' a}{K}}.$$

Поэтому уравненіе (3) можетъ быть написано въ такомъ видѣ:

$$\lambda M(2mK + 2m'K'i) - \frac{2\pi i\lambda m'a}{K} = 2s\pi i.$$

Полагая въ этомъ уравненіи $m = 1$, $m' = 0$ и обозначая черезъ ν' соотвѣтствующую величину s, получимъ

$$(4)\qquad M = \frac{\nu'\pi i}{\lambda K}.$$

Полагая потомъ $m = 0$, $m' = 1$ и обозначая черезъ $-\nu$ соотвѣтствующую величину s, получимъ

$$(5)\qquad a = \frac{\nu K + \nu' K'i}{\lambda}.$$

Найдя величину M по уравненію (4), опредѣлимъ постоянную A.

Докажемъ теперь, что условіе (5) есть не только необходимое, но и достаточное, для того, чтобы

$$\int\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}$$

выражался черезъ логариѳмы т. е. другими словами докажемъ, что если имѣетъ мѣсто равенство (5) и величина M или, что тоже самое, параметръ A опредѣляется по уравненію (4), то интегралъ

$$\int\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}$$

выражается въ логариѳмахъ. По формулѣ (3) n^0 65 принимая во вниманіе величину M найдемъ

$$\lambda\int\frac{(x-A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}} = \frac{\nu'\pi i u}{K} + \lambda\log\frac{H(a+u)}{H(a-u)}$$

$$= \log\left[e^{\frac{\nu'\pi i u}{K}}\left(\frac{H(a+u)}{H(a-u)}\right)^{\lambda}\right]$$

Мы докажемъ, что, при $a = \frac{\nu K + \nu' K'i}{\lambda}$, можно найти цѣлыя функціи P и Q степеней λ и $\lambda - 2$ перемѣнной

$$x = \frac{sn^2 u}{sn^2 u - sn^2 a}$$

удовлетворяющія уравненію·

$$e^{\frac{\nu'\pi i u}{K}}\left[\frac{H(a+u)}{H(a-u)}\right]^{\lambda}=P+Q\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}.$$

Дѣйствительно, въ очеркѣ теоріи эллиптическихъ функцій [38] **Эрмита** доказано, что

$$\frac{H(u-\alpha_1)\,H(u-\alpha_2)\,\ldots,\,H(u-\alpha_{2\lambda})}{\Theta^{2\lambda}(u)}$$

$$=F(sn^2u)+F_1(sn^2u)\;snu\;cnu\;dnu,$$

если

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots\ldots+\alpha_{2\lambda}=0;$$

F и F_1 означаютъ здѣсь цѣлыя функціи степеней λ и $\lambda - 2$.

Полагая

$$\alpha_1=\alpha_2=\ldots\ldots=\alpha_{2\lambda-1}=-a=-\frac{\nu K+\nu'K'i}{\lambda},$$

$$\alpha_{2\lambda}=-a+2\nu K+2\nu'K'i=-\frac{\nu K+\nu'K'i}{\lambda}+2\nu K+2\nu'K'i$$

и замѣчая, что

$$H(u+a-2\nu K-2\nu'K'i)=(-1)^{\nu+\nu'}\,H(u+a)\,e^{\frac{\pi i\nu'}{K}(u+a-\nu'K'i)},$$

получимъ

$$\frac{H(u-\alpha_1)\,H(u-\alpha_2)\,,\ldots H(u-\alpha_{2\lambda})}{\Theta^{2\lambda}(u)}=Ce^{\frac{\pi i\nu'u}{K}}\left[\frac{H(u+a)}{\Theta(u)}\right]^{2\lambda},$$

гдѣ

$$C=(-1)^{\nu+\nu'}\,e^{\frac{\pi i\nu'}{K}(a-\,'K'i)}.$$

Принимая во вниманіе извѣстное соотношеніе [39]

$$\frac{H(u-a)\,H(u+a)}{\Theta^2(u)}=\mu(sn^2u-sn^2a),$$

гдѣ

$$\mu=\frac{k\Theta^2(a)}{\Theta^2(o)},$$

найдемъ

$$e^{\frac{\pi i\nu'u}{K}}\left[\frac{H(u+a)}{H(u-a)}\right]^{\lambda}=\frac{F(sn^2u)+F_1(sn^2u)\,snu\;cnu\;dnu}{C\mu^{\lambda}(sn^2u-sn^2a)^{\lambda}}$$

Вторая часть этого равенства, очевидно, можетъ быть представлена въ видѣ

$$P+Q\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)},$$

гдѣ P и Q цѣлыя функціи перемѣнной

$$x=\frac{sn^2u}{sn^2u-sn^2a}.$$

Итакъ окончательно будемъ имѣть

$$e^{\frac{\pi i\nu'u}{K}}\left[\frac{H(u+a)}{H(u-a)}\right]^{\lambda}=P+Q\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}.$$

Перемѣняя u на $-u$, получимъ

$$e^{\frac{-\pi i\nu' u}{K}}\left[\frac{H(u-a)}{H(u+a)}\right]^{\lambda} = P - Q\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)};$$

слѣдовательно функціи P и Q удовлетворяютъ уравненію

$$P^2 - Q^2 x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta) = 1.$$

Мы заключаемъ такимъ образомъ, что, при $a = \frac{\nu K + \nu' K' i}{\lambda}$, интегралъ

$$\int \frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}$$

выражается въ логариѳмахъ.

71.

Мъ этомъ n^0 мы докажемъ, что, при $a = \frac{\nu K + \nu' K' i}{\lambda}$, между параметрами α и β, которые равны соотвѣтственно $\frac{1}{dn^2 a}$, $\frac{1}{cn^2 a}$ имѣетъ мѣсто уравненіе вида

$$F(\alpha, \beta) = 0,$$

гдѣ F — цѣлая функція съ цѣлыми коэффиціентами.

При этомъ намъ придется разсмотрѣть нѣсколько случаевъ:

1) λ — нечетное. Въ этомъ случаѣ, какъ извѣстно, имѣютъ мѣсто формулы

$$sn(\lambda u) = snu \frac{U_\lambda}{\Omega_\lambda}$$

$$cn(\lambda u) = cnu \frac{V_\lambda}{\Omega_\lambda}$$

$$dn(\lambda u) = dnu \frac{W_\lambda}{\Omega_\lambda},$$

гдѣ U_λ, V_λ, W_λ и Ω_λ суть цѣлыя функціи k^2 и $sn^2 u$ съ цѣлыми коэффиціентами.

Относительно ν и ν' можно сдѣлать только такія предположенія:

a) ν и ν' — числа четныя. Подставляя въ выраженіе $sn(\lambda u)$ вмѣсто u a, найдемъ

$$U_\lambda = 0$$

b) ν — нечетное, ν' — четное; тогда $cn(\lambda a) = 0$ и, слѣдовательно, $V_\lambda = 0$.

c) ν — нечетное, ν' — нечетное; тогда $dn(\lambda a) = 0$ и, слѣдовательно, $W_\lambda = 0$.

d) ν — четное, ν' — нечетное; тогда $sn(\lambda a) = \infty$ и, слѣдовательно, $\Omega_\lambda = 0$.

2) λ — число четное. Въ этомъ случаѣ имѣютъ мѣсто формулы

$$sn(\lambda u) = snu\ cnu\ dnu \frac{U_\lambda}{\Omega_\lambda},\quad cn(\lambda u) = \frac{V_\lambda}{\Omega_\lambda},\quad dn\lambda u = \frac{W_\lambda}{\Omega_\lambda}.$$

Здѣсь относительно ν и ν' можно сдѣлать слѣдующія предположенія:

a) ν — нечетное, ν' четное; тогда $cn\lambda a = 0$ и, слѣдовательно, $U_\lambda = 0$.

b) ν — нечетное, ν' — нечетное, тогда $dn\lambda a = 0$ и, слѣдовательно, $W_\lambda = 0$.

c) ν — четное, ν' — нечетное; тогда $sn\lambda a = \infty$ и, слѣдовательно, $\Omega_\lambda = 0$ (*).

Всѣ эти уравненія послѣ подстановки вмѣсто k^2 и sn^2a ихъ значеній

$$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha-1}{\beta-1},\quad \frac{\beta-1}{\beta}$$

и приведенія примутъ видъ

$$F(\alpha, \beta) = 0,$$

гдѣ F — цѣлая функція съ цѣлыми коеффиціентами.

Примѣчаніе. Если α и β вещественные и удовлетворяютъ условію

$$1 < \alpha < \beta,$$

то $k^2 = \frac{\beta}{\alpha}\frac{\alpha-1}{\beta-1}$ будетъ также величина вещественная и меньшая единицы. Величина a опредѣляется изъ уравненія

$$sn^2a = \frac{\beta-1}{\beta}$$

можетъ быть принята также вещественною, слѣдовательно $\nu' = 0$ и $a = \frac{\nu K}{\lambda}$.

72.

Предполагая, что a имѣетъ значеніе $\frac{\nu K + \nu' K' i}{\lambda}$, преобразуемъ дифференціалъ

$$\frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}$$

нѣсколько разъ по формуламъ (6) и (7) n^0 63.

Мы перейдемъ сначала отъ дифференціала съ параметрами α и β къ дифференціалу того же вида съ параметрами α_1 и β_1, потомъ къ дифференціалу съ параметрами α_2 и β_2 и т. д.

Эти параметры, какъ было доказано въ n^0 67, выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$\alpha = \frac{1}{dn^2a},\quad \alpha_1 = \frac{1}{dn^2 2a},\quad \alpha_2 = \frac{1}{dn^2 4a}\ \dots$$

$$\beta = \frac{1}{cn^2a},\quad \beta_1 = \frac{1}{cn^2 2a},\quad \beta_2 = \frac{1}{cn^2 4a}\ \dots$$

(*) Случай ν четнаго и ν' четнаго, при λ четномъ, можно устранить принявши, что числа ν, ν' и λ не имѣютъ общаго дѣлителя.

Положимъ, что число $\lambda = 2^s m$, гдѣ m нечетное число. При этомъ всегда можно найти цѣлое число σ больше $s + 1$ и удовлетворяющее сравненію

$$2^\sigma \equiv 2^{s+1} \text{ (мод. } \lambda).$$

Изображая число $\frac{2^\sigma - 2^{s+1}}{\lambda}$ черезъ p, получимъ

$$2^\sigma \frac{\nu K + \nu' K' i}{\lambda} = 2^{s+1} \frac{\nu K + \nu' K' i}{\lambda} + p(\nu K + \nu' K' i).$$

Такъ какъ p есть четное число, то

$$cn^2\, 2^\sigma a = cn^2\, 2^{s+1} a$$

$$dn^2\, 2^\sigma a = dn^2\, 2^{s+1} a;$$

слѣдовательно

$$\alpha_\sigma = \alpha_{s+1},\ \beta_\sigma = \beta_{s+1},$$

а потому

$$\alpha_{\sigma+1} = \alpha_{s+2},\ \beta_{\sigma+1} = \beta_{s+2}$$

т. е. параметры α и β будутъ повторяться періодически. Обратно, если параметры α и β будутъ идти періодически, то

$$a = \frac{\nu K + \nu' K' i}{\lambda}.$$

Дѣйствительно, пусть

$$\alpha_\mu = \alpha_m,\ \beta_\mu = \beta_m;$$

тогда

$$2^\mu a = \pm 2^m a + 2\nu K + 2\nu' K' i,$$

гдѣ ν и ν' цѣлыя числа; слѣдовательно

$$a = \frac{\nu K + \nu' K' i}{2^{\mu-1} \mp 2^{m-1}} = \frac{\nu K + \nu' K' i}{\lambda},$$

гдѣ $\lambda = 2^{\mu-1} \mp 2^{m-1}$.

Итакъ, условіе интегрируемости дифференціала

$$\frac{(x + A)\, dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}$$

въ логариѳмахъ можно выразить еще такимъ образомъ: Если при вычисленіи $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ и т. д. по формуламъ (n^0 67)

$$\alpha_1 = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{1 + \beta - \alpha}\right)^2,\ \alpha_2 = \left(\frac{\alpha_1 + \beta_1 - 1}{1 + \beta_1 - \alpha_1}\right)^2,$$

$$\beta_1 = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{1 + \alpha - \beta}\right)^2,\ \beta_2 = \left(\frac{\alpha_1 + \beta_1 - 1}{1 + \alpha_1 - \beta_1}\right)^2,$$

получатся параметры α_μ и β_μ равные соотвѣтственно α_m и β_m $(\mu > m)$, то далѣе параметры будутъ уже повторяться, и дифференціалъ

$$\frac{(x + A)\, dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}},$$

при нѣкоторомъ значеніи A, интегрируется въ логариѳмахъ. Обратно, когда этотъ дифференціалъ интегрируется въ логариѳмахъ параметры α и β будутъ повторяться періодически.

Въ этомъ случаѣ, какъ намъ извѣстно, можно положить

$$\int\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}} = C\log(P+Q\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}),$$

гдѣ P и Q суть функціи удовлетворяющія уравненію

$$P^2 - Q^2x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta) = \text{постоян.}$$

Можно предположить, что изъ всѣхъ рѣшеній этого уравненія выбрано то, въ которомъ степени функцій P и Q будутъ самыя меньшія.

Если λ — степень функціи P будетъ нечетное число, то періодъ начнется или съ параметровъ α, β или съ параметровъ α_1, β_1. Дѣйствительно, пусть будетъ

$$a = \frac{\nu K + \nu' K' i}{\lambda}$$

и ρ — наименьшое число удовлетворяющее сравненію

$$2^\rho \equiv 1 \ (\text{мод. } \lambda),$$

которое всегда имѣетъ рѣшеніе; рѣшеніе $\rho = 0$ исключается. На основаніи этого сравненія при $a = \frac{\nu K + \nu' K' i}{\lambda}$, находимъ

$$cn^2\, 2^{\rho+1} a = cn^2\, 2a$$

$$dn^2\, 2^{\rho+1} a = dn^2\, 2a;$$

слѣдовательно

$$\alpha_{\rho+1} = \alpha_1,\ \beta_{\rho+1} = \beta_1.$$

При четныхъ ν и ν' получимъ

$$\alpha_\rho = \alpha,\ \beta_\rho = \beta.$$

Такъ что въ этомъ случаѣ періодъ начнется съ чиселъ α , β. Если же λ — число четное, то періодъ можетъ начаться съ какихъ нибудь параметровъ α_m, β_m.

73.

При четномъ λ будетъ имѣть мѣсто еще одно условіе между параметрами α и β, которое мы выведемъ въ этомъ n^0.

Предположивъ, что α и β вещественные, мы заключаемъ изъ способа вычисленія функцій P и Q черезъ непрерывныя дроби, что коеффиціенты этихъ функцій будутъ также вещественные и выразятся раціонально черезъ α и β. Изъ уравненія

$$(1) \qquad P^2 - Q^2\, x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta) = \text{постоян.},$$

полагая $x = 0$, находимъ, что вторая часть этого равенства равна B^2, если B есть значеніе P, при $x = 0$. Уравненіе

$$P^2 - Q^2\, x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta) = B^2$$

распадается, какъ мы увидимъ, на два слѣдующія:

$$(2) \qquad \begin{cases} P - B = \pm Q_1^2\, x(x-\beta) \\ P + B = \pm Q_2^2(x-1)\,(x-\alpha), \end{cases}$$

гдѣ
$$Q_1 Q_2 = Q.$$

Можно принять, что коеффиціентъ высшаго члена P положительный, потому что въ противномъ случаѣ можно было бы перемѣнить P на $-P$. Въ этомъ предположеніи въ уравненіяхъ (2) придется удержать знакъ $+$; такъ что онѣ принимаютъ видъ

$$P - B = Q_1^2\, x(x-\beta)$$
$$P + B = Q_2^2(x-1)\,(x-\alpha).$$

Эти уравненія могутъ быть выведены изъ (1) при помощи слѣдующаго разсужденія:

Функціи $P - B$ и $P + B$ не имѣютъ общаго дѣлителя, потому что иначе такой дѣлитель раздѣлилъ бы ихъ разность, что, очевидно, невозможно; такъ что P должно разлагаться на два множителя Q_1 и Q_2 неимѣющихъ общихъ дѣлителей.

Одинъ изъ квадратовъ
$$Q_1^2,\ Q_2^2,$$
напр. Q_1^2, долженъ дѣлить функцію $P - B$, а другой $P + B$.

Что касается до произведенія
$$x(x-1)\,(x-\alpha)\,(x-\beta),$$
которое мы будемъ означать черезъ Rx, то относительно его можно сдѣлать два предположенія

Такъ какъ P функція четной степени, равно какъ и функціи Q_1^2, Q_2^2, то множители Rx должны входить или всѣ въ одну изъ функцій
$$P - B,\ P + B$$
или два въ одну, а два въ другую; при этомъ множитель x входитъ въ $P - B$; потому что P обращается въ B, при $x = 0$. Перваго предположенія сдѣлать нельзя, потому что оно привело бы къ уравненіямъ
$$P - B = Q_1^2\, Rx$$
$$P + B = Q_2^2,$$
изъ которыхъ получилось бы такое:
$$Q_2^2 - Q_1^2\, R(x) = 2B$$
и, слѣдовательно, P и Q не были бы функціями наименьшей степени удовлетворяющими уравненію (1), потому что тому же уравненію удовлетворяютъ Q_2 и Q_1.

Относительно втораго предположенія замѣтимъ, что въ функцію $P - B$ долженъ входить, кромѣ множителя x, еще множитель $x - \beta$, а ни $x - 1$ и ни $x - \alpha$. Въ самомъ дѣлѣ положимъ, что въ функцію $P - B$ входитъ одинъ изъ множителей $x - \alpha$, $x - 1$, напр. $x - 1$. Мы получимъ тогда уравненія

$$P - B = Q_1^2\, x(x - 1)$$

$$P + B = Q_2^2(x - \alpha)\,(x - \beta),$$

невозможность которыхъ можно обнаружить давая x различныя значенія.

Если $$0 < x < 1,$$
то, по предыдущимъ уравненіямъ,

$$P < B \text{ и } P > -B;$$

слѣдовательно $$B > 0.$$

Если

$$\alpha < x < \beta,$$

то

$$P > B \text{ и } P < -B;$$

слѣдовательно $$B < 0,$$
а въ этомъ заключается противорѣчіе.

Точно также обнаруживается невозможность уравненій

$$P - B = Q_1^2\, x(x - \alpha)$$

$$P + B = Q_2^2(x - 1)\,(x - \beta).$$

Слѣдовательно должны имѣть мѣсто уравненія

$$(3) \qquad \begin{cases} P - B = Q_1^2\, x(x - \beta) \\ P + B = Q_2^2(x - 1)\,(x - \alpha). \end{cases}$$

Такъ какъ коеффиціенты функціи P выражаются раціонально черезъ α и β, то изъ уравненій (3) слѣдуетъ, что и коеффиціенты Q_1 и Q_2 выразятся раціонально въ α и β.

Положивъ въ уравненіяхъ (3) послѣдовательно $x = 1$ и $x = \alpha$ и обозначивъ черезъ Q_1' и Q_1'' значенія функціи Q_1 при этихъ величинахъ x, получимъ

$$-2B = Q_1'^2(1 - \beta)$$

$$-2B = Q_1''^2(\alpha - \beta)\,\alpha;$$

слѣдовательно

$$\sqrt{\frac{\beta - \alpha}{\alpha(\beta - 1)}} = \pm \frac{2B}{Q_1'Q_1''.\,\alpha(\beta - 1)}$$

т. е. $\sqrt{\frac{\beta - \alpha}{\alpha(\beta - 1)}}$ выражается раціонально черезъ α и β.

Мы видѣли выше (n^0 69), что дополнительный модуль интеграла

$$\int \frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}$$

выражается въ параметрахъ α и β такимъ образомъ:

$$k' = \sqrt{\frac{\beta - \alpha}{\alpha(\beta - 1)}}.$$

Итакъ

$$k' = \pm \frac{Q_1'}{\alpha Q_1''}$$

выражается раціонально въ α и β.

74.

Теперь мы переходимъ къ рѣшенію вопроса поставленнаго въ n^0 61:

Узнать при помощи конечнаго числа дѣйствій интегрируется ли въ логариѳмахъ дифференціалъ

$$\frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}.$$

Всевозможныя значенія α и β можно раздѣлить на три класса:

1) Къ первому классу отнесемъ такія значенія α и β, между которыми нѣтъ ни одной зависимости вида

(1) $$F(\alpha, \beta) = 0,$$

гдѣ F цѣлая функція съ цѣлыми коеффиціентами. Дифференціалъ съ такими параметрами α и β неинтегрируется въ логариѳмахъ, потому что въ противномъ случаѣ, какъ было доказано въ n^0 71 должно существовать между α и β уравненіе вида (1).

2) Ко второму классу мы причисляемъ значенія параметровъ α и β, между которыми имѣютъ мѣсто только такія уравненія

$$F(\alpha, \beta) = 0$$

съ цѣлыми коеффиціентами, которыя будутъ слѣдствіемъ одного уравненія

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0$$

съ цѣлыми коеффиціентами; такъ, что $f(\alpha, \beta)$ алгебраически дѣлится на $\varphi(\alpha, \beta)$.

Изъ этого слѣдуетъ, что $\varphi(\alpha, \beta)$ недѣлится ни на какую цѣлую функцію α, β съ цѣлыми коеффиціентами степени низшей, потому что иначе можно было бы между α и β составить уравненіе съ цѣлыми коеффиціентами, первая часть котораго не дѣлилась бы на $\varphi(\alpha, \beta)$.

Вмѣсто параметровъ α и β мы въ этомъ случаѣ разсмотримъ другіе k и l, связанные съ α и β уравненіями

$$\alpha = \frac{1}{1 - k^2 l}, \quad \beta = \frac{1}{1 - l}$$

или, что тоже самое, уравненіями

$$k^2 = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha - 1}{\beta - 1}, \quad t = \frac{\beta - 1}{\beta}.$$

Всякому уравненію съ цѣлыми коеффиціентами между α и β будетъ соотвѣтствовать также уравненіе съ цѣлыми коеффиціентами между k^2 и t и обратно. Поэтому въ разсматриваемомъ случаѣ всѣ уравненія съ цѣлыми коеффиціентами, которымъ удовлетворяютъ значенія k^2 и t, соотвѣтствующія даннымъ значеніямъ α и β, будутъ слѣдствіемъ одного уравненія

$$\varphi_1(t, k^2) = 0.$$

Такъ что если мы найдемъ какое нибудь уравненіе

$$f_1(t, k^2) = 0$$

съ цѣлыми коеффиціентами, которому удовлетворяютъ извѣстныя значенія k^2 и t, то функція $f_1(t, k^2)$ должна алгебраически раздѣлиться на $\varphi_1(t, k^2)$.

Если дифференціалъ съ параметрами α и β интегрируется въ логариѳмахъ, то, какъ намъ извѣстно,

$$t = sn^2 \frac{\nu K + \nu' K' i}{\lambda}.$$

Относительно чиселъ ν, ν' и λ можно принять, что онѣ не имѣютъ общаго дѣлителя.

Въ этомъ случаѣ (см. Прибавленіе) k^2 и t удовлетворяютъ уравненію съ цѣлыми коеффиціентами

$$\varPhi(t, k^2) = 0$$

степени $\frac{\lambda^2}{2}\left(1 - \frac{1}{p^2_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p^2_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p^2_s}\right)$ относительно t, гдѣ $p_1, p_2 \ldots p_s$ всѣ простыя нечетныя числа дѣлящія λ.

Такъ какъ $\varPhi(t, k^2)$ не дѣлится ни на какую цѣлую функцію t и k^2 съ цѣлыми коеффиціентами степени низшей, то $\varPhi(t, k^2)$ можетъ отличаться только постояннымъ множителемъ отъ $\varphi_1(t, k^2)$.

Итакъ обозначая черезъ μ степень функціи $\varphi_1(t, k^2)$ относительно t, получимъ

$$\mu = \frac{\lambda^2}{2}\left(1 - \frac{1}{p_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p^2_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p^2_s}\right).$$

Такъ какъ $p_1, p_2 \ldots . p_s$ числа не меньшія 3, то

$$1 - \frac{1}{p_1^2} > \frac{2}{p_1}$$

$$1 - \frac{1}{p^2_2} > \frac{2}{p_2}$$

и т. д.;

слѣдовательно

$$\mu > 2^{s-1}\lambda \frac{\lambda}{p_1 p_2 \dots p_s},$$

а потому

$$\mu > \lambda.$$

Итакъ найденъ высшій предѣлъ для λ.

Обращаясь теперь къ вычисленію параметровъ $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \dots$ по формуламъ

$$\alpha_1 = \left(\frac{\alpha+\beta-1}{1+\beta-\alpha}\right)^2, \ \beta_2 = \left(\frac{\alpha+\beta-1}{1+\alpha-\beta}\right)^2$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{\alpha_1+\beta_1-1}{1+\beta_1-\alpha_1}\right)^2, \ \beta_2 = \left(\frac{\alpha_1+\beta_1-1}{1+\alpha_1-\beta_1}\right)^2$$

и т. д.

или, что все равно, по формуламъ

$$\alpha_1 = \frac{1}{dn^2\, 2a}, \ \beta_1 = \frac{1}{cn^2\, 2a}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{dn^2 2^2 a}, \ \beta_2 = \frac{1}{cn^2 2^2 a}$$

$$\dots\dots\dots$$

гдѣ $a = \frac{\nu K + \nu' K' i}{\lambda}$, мы замѣтимъ, что число различныхъ системъ параметровъ

$$(\alpha_1, \beta_1), \ (\alpha_2, \beta_2) \dots$$

не превзойдетъ λ.

Дѣйствительно, число различныхъ остатковъ отъ дѣленія степеней

$$2, 2^2, 2^3 \dots$$

на λ не можетъ превзойдти λ. Но какъ только двѣ степени 2 напр. 2^σ и 2^ε будутъ сравнимы по модулю λ, такъ

$$\alpha_{\sigma+1} = \alpha_{\varepsilon+1}, \ \beta_{\sigma+1} = \beta_{\varepsilon+1}$$

$$\alpha_{\sigma+2} = \alpha_{\varepsilon+2}, \ \beta_{\sigma+2} = \beta_{\varepsilon+2}$$

и т. д.

и параметры начнутъ повторяться періодически.

Итакъ число различныхъ системъ

$$(\alpha_1, \beta_1), \ (\alpha_2, \beta_2) \dots$$

въ случаѣ ихъ періодичности не превосходитъ высшаго предѣла для λ т. е. μ. Если число вычисленныхъ системъ параметровъ превосходитъ μ и періодичности не обнаруживается, то предложенный дифференціалъ неинтегрируется въ логариомахъ.

3) Теперь мы перейдемъ къ тому случаю, когда между параметрами α и β существуетъ по крайней мѣрѣ два уравненія съ цѣлыми коеффиціентами

$$F(\alpha, \beta) = 0$$

$$F_1(\alpha, \beta) = 0,$$

гдѣ F и F_1 не имѣютъ общаго дѣлителя.

Тогда изъ этихъ двухъ уравненій можно исключить сначала одинъ параметръ напр. β и получить уравненіе

$$\varphi(\alpha) = 0,$$

гдѣ $\varphi(\alpha)$ есть цѣлая функція съ цѣлыми коеффиціентами. Точно также исключая изъ тѣхъ же уравненій α, получимъ уравненіе

$$\varphi_1(\beta) = 0$$

съ цѣлыми коеффиціентами.

75.

Докажемъ сначала что α и β можно выразить раціональными функціями съ цѣлыми коеффиціентами отъ одного корня v нѣкотораго уравненія

$$F(v) = 0$$

съ цѣлыми коеффиціентами.

Дѣйствительно положимъ, что

$$v = a\alpha + b\beta$$

гдѣ a и b — какія нибудь цѣлыя числа.

Пусть

$$\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \ldots \alpha_{m-1}$$

будутъ всѣ корни уравненія

$$\varphi(\alpha) = 0$$

и

$$\beta, \beta_1, \beta_2 \ldots \ldots \beta_{\mu-1}$$

всѣ корни уравненія

$$\varphi_1(\beta) = 0.$$

Положимъ, что

$$\begin{aligned} v &= a\alpha + b\beta \\ v_1 &= a\alpha_1 + b\beta \\ &\ldots\ldots\ldots \\ v_{m-1} &= a\alpha_{m-1} + b\beta \\ v_m &= a\alpha + b\beta_1 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ v_{m\mu-1} &= a\alpha_{m-1} + b\beta_{\mu-1} \end{aligned}$$

будутъ всевозможныя значенія v для всѣхъ корней уравненій

$$\varphi(\alpha) = 0, \quad \varphi_1(\beta) = 0.$$

Извѣстно, что $m\mu$ количествъ

$$v, \; v_1, \; v_2 \; \ldots \; v_{m\mu-1}$$

удовлетворяютъ одному уравненію съ цѣлыми коеффиціентами

$$F(v) = 0.$$

Теперь составимъ новое количество

$$w = a'\alpha + b'\beta,$$

предполагая, что a', b' цѣлыя числа и опредѣлитель $ab' - a'b$ не равенъ нулю.

Легко показать, что w выражаетѣся раціонально черезъ v. Замѣчая, что

$$\begin{array}{lllll}
w & + w_1 & + w_2 & + \ldots & + w_{m\mu-1} \\
vw & + v_1 w_1 & + v_2 w_2 & + \ldots & + v_{m\mu-1} w_{m\mu-1} \\
v^2 w & + v_1^2 w_1 & + v_2^2 w_2 & + \ldots & + v_{m\mu-1}^2 w_{m\mu-1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
v^{m\mu-1} w & + v_1^{m\mu-1} w_1 & + v_2^{m\mu-1} w_2 & + \ldots & + v_{m\mu-1}^{m\mu-1} w_{m\mu-1},
\end{array}$$

гдѣ w, w_1 w_2 .... означаютъ всѣ значенія w, равны извѣстнымъ раціональнымъ числамъ, мы получимъ $m\mu$ линейныхъ уравненій относительно

$$w, \; w_1 \; \ldots \; w_{m\mu-1},$$

изъ которыхъ по извѣстному способу выводимъ

$$w = \frac{\Phi(v)}{F'(v)}, \quad w_1 = \frac{\Phi(v_1)}{F'(v_1)} \text{ и т. д. } \ldots$$

$\Phi(v)$ означаетъ здѣсь цѣлую функцію съ раціональными коеффиціентами, а $F'(v)$ первую производную отъ $F(v)$

Числа a и b можно выбрать такимъ образомъ, чтобы уравненіе

$$F(v) = 0$$

не имѣло равныхъ корней, если ихъ не имѣютъ уравненія

$$\varphi(\alpha) = 0, \quad \varphi_1(\beta) = 0,$$

что всегда можно предположить. Поэтому ни одно изъ количествъ

$$F'(v), \; F'(v_1), \; F'(v_2) \; \ldots$$

не будетъ равно нулю.

Изъ равенствъ

$$v = a\alpha + b\beta$$

$$w = a'\alpha + b'\beta$$

найдемъ α и β въ видѣ раціональныхъ функцій отъ v.

Понятно, что уравненіе

$$F(v) = 0$$

можно считать неприводимымъ, потому что иначе вмѣсто функціи F можно было бы взять одинъ изъ ея неприводимыхъ дѣлителей.

Кромѣ того извѣстно, что уравненіе

$$F(v) = 0$$

можетъ быть преобразовано такъ, что коеффиціентъ у высшаго члена будетъ единица.

76.

Въ этомъ n^0 и въ слѣдующихъ мы рѣшимъ нашу задачу относительно дифференціала

$$(1) \qquad \frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x(x - 1)(x - \alpha)(x - \beta)}}$$

для того случая, когда α и β выражаются раціональными функціями одного параметра v (*), удовлетворяющаго уравненію n-й степени

$$F(v) = 0$$

съ цѣлыми коеффиціентами (причемъ первый изъ нихъ равенъ единицѣ).

Кромѣ того мы допустимъ, что $F(v)$ не принадлежитъ къ числу тѣхъ функцій, которыя были исключены въ III-й главѣ этого сочиненія, при изложеніи теоріи комплексныхъ чиселъ. Если дифференціалъ (1) интегрируется въ логариѳмахъ, то можно положить, какъ намъ извѣстно, что

$$\int \frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x(x - 1)(x - \alpha)(x - \beta)}} = C \log\left(P + Q\sqrt{x(x - 1)(x - \alpha)(x - \beta)}\right),$$

гдѣ P и Q суть функціи удовлетворяющія уравненію

$$P^2 - Q^2\, x(x - 1)(x - \alpha)(x - \beta) = \text{постоян.}$$

Допустимъ, что изъ всѣхъ рѣшеній этого уравненія выбрано то, въ которомъ функціи P и Q будутъ наименьшей степени. Мы увидимъ, что въ томъ случаѣ, когда P будетъ полиномъ четной степени, можно, при помощи нѣсколькихъ преобразованій n^0 64, замѣнить данный дифференціалъ другимъ, для котораго функція соотвѣтствующая P будетъ уже нечетной степени.

(*) Здѣсь подразумѣваются, конечно, раціональныя функціи съ цѣлыми коеффиціентами.

Въ n^0 73 было доказано, что, при четной степени полинома P, не только α и β, но и величина

$$k' = \sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\alpha(\beta-1)}}$$

выражается раціонально черезъ v. Поэтому преобразуя данный дифференціалъ по формуламъ n^0 64, получимъ дифференціалъ

$$\frac{(z+B)\,dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\xi)(z-\eta)}},$$

въ которомъ параметры

$$\xi = \left(\frac{\sqrt{(\beta-\alpha)(\beta-1)}-\sqrt{\alpha}}{1+\alpha-\beta}\right)^2 = \frac{\alpha((\beta-1)\,k'-1)^2}{(1+\alpha-\beta)^2}$$

$$\eta = \left(\frac{\sqrt{(\beta-\alpha)(\beta-\alpha)}+\sqrt{\alpha}}{1+\alpha-\beta}\right)^2 = \frac{\alpha((\beta-1)\,k'+1)^2}{(1+\alpha-\beta)^2}$$

будутъ также раціональными функціями v.

Пусть

$$\int\frac{(z+B)\,dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\xi)(z-\eta)}} = C_1 \log(P_1 + Q_1\sqrt{z(z-1)\,(z-\xi)\,(z-\eta)}),$$

гдѣ P_1 и Q_1 суть цѣлыя функціи z самыхъ меньшихъ степеней, удовлетворяющія уравненію

$$P_1^2 - Q_1^2\,z(z-1)\,(z-\xi)\,(z-\eta) = \text{постоян.}$$

Если P_1 — четной степени, то не только ξ и η, но и величина

$$k_1' = \sqrt{\frac{\eta-\xi}{\xi(\eta-1)}} = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$$

выражается раціонально черезъ v. Потомъ переходимъ къ дифференціалу

$$\frac{(z_1+B_1)\,dz_1}{\sqrt{z_1(z_1-1)(z_1-\xi_1)(z_1-\eta_1)}},$$

гдѣ параметры ξ_1, η_1 выражаются раціонально черезъ v и т. д.

Разсматриваемое преобразованіе не прилагается только въ томъ случаѣ, когда параметры ξ_i и η_i удовлетворяютъ условію

$$\eta_i = \xi_i + 1.$$

Въ этомъ случаѣ, какъ мы видѣли, интегралъ

$$\int\frac{(z_i+B_i)\,dz_i}{\sqrt{z_i(z_i-1)(z_i-\xi_i)(z_i-\eta_i)}}$$

берется непосредственно въ логариѳмахъ.

Исключая этотъ случай, мы докажемъ, что, при вычисленіи величинъ k_1', k_2' . . . . по формуламъ

$$k_1' = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'},\ k_2' = \frac{2\sqrt{k_1'}}{1+k_1'}\ \ldots\ldots$$

мы непремѣнно дойдемъ до величины k_σ' которая уже не будетъ выражаться раціонально черезъ v. Поэтому, если интегралъ

$$\int\frac{(z_{\sigma-1}+B_{\sigma-1})\,dz_{\sigma-1}}{\sqrt{z_{\sigma-1}(z_{\sigma-1}-1)(z_{\sigma-1}-\xi_{\sigma-1})(z_{\sigma-1}-\eta_{\sigma-1})}}$$

выражается въ логариомахъ, то онъ долженъ представляться подъ видомъ

$$C_\sigma\log(P_\sigma+Q_\sigma\sqrt{z_{\sigma-1}(z_{\sigma-1}-1)(z_{\sigma-1}-\xi_{\sigma-1})(z_{\sigma-1}-\eta_{\sigma-1})}),$$

гдѣ P_σ функція нечетной степени.

Для доказательства того, что мы всегда дойдемъ, послѣ конечнаго числа дѣйствій, до такой величины k_σ', мы воспользуемся теоріею комплексныхъ чиселъ, изложенной въ предыдущей главѣ.

77.

Положимъ

$$k'=\frac{A}{B},$$

гдѣ A и B цѣлыя комплексныя числа относительно v. Обозначимъ черезъ d— существующій или идеальный наибольшій дѣлитель этихъ чиселъ, такъ что

$$A=da,\quad B=db,$$

гдѣ a и b существующія или идеальныя комплексныя числа, неимѣющія общаго дѣлителя. Мы имѣемъ

$$k_1'=\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}=\frac{2\sqrt{AB}}{A+B}=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$$

Такъ какъ k_1' выражается раціонально черезъ v, то $\sqrt{AB}$ долженъ быть цѣлымъ комплекснымъ числомъ (n^0 52).

Положивъ теперь

$$A_1=2\sqrt{AB},\quad B_1=A+B,$$

получимъ

$$k_1'=\frac{A_1}{B_1}.$$

Очевидно, что d есть также общій дѣлитель чиселъ A_1 и B_1; слѣдовательно можно положить

$$A_1=da_1,\quad B_1=db_1,$$

гдѣ числа

$$a_1=2\sqrt{ab},\quad b_1=a+b$$

могутъ имѣть общими дѣлителями только существующіе или идеальные множители числа 2. Продолжая вычисленіе далѣе, мы получимъ общія формулы

$$a_\mu=2\sqrt{a_{\mu-1}b_{\mu-1}},\quad b_\mu=a_{\mu-1}+b_{\mu-1}$$

$$A_\mu=da_\mu,\quad B_\mu=db_\mu$$

$$k_\mu' = \frac{A_\mu}{B_\mu}.$$

Идеальные общіе дѣлители чиселъ a_μ и b_μ могутъ состоять только изъ простыхъ множителей числа 2. Такъ какъ всѣ числа

$$a,\ b,\ a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2\ \ldots\ .$$

будучи умножены на d даютъ въ произведеніи существующія комплексныя числа, то всѣ онѣ принадлежатъ къ одному классу идеальныхъ чиселъ. Теперь мы разсмотримъ нѣсколько случаевъ.

1) Допустимъ сначала, что a или b дѣлится на нѣкоторый простой идеальный множитель $f(v)$ обыкновеннаго простаго нечетнаго числа. Изобразимъ черезъ h показатель, съ которымъ входитъ этотъ множитель въ a или b; этотъ показатель долженъ быть числомъ четнымъ для того, чтобы

$$a_1 = 2\sqrt{ab}$$

было цѣлымъ комплекснымъ числомъ. Пусть

$$h = 2^g h_1,$$

гдѣ h_1 нечетное число. Очевидно, что множитель $f(v)$ войдетъ въ a_1 $\frac{h}{2}$ т. е. $2^{g-1}h_1$ разъ и не войдетъ совсѣмъ въ b_1, въ a_2 $2^{g-2}h_1$ разъ и т. д. и, наконецъ, въ a_g—h_1 разъ; такъ что a_{g+1} уже не можетъ быть цѣлымъ комплекснымъ числомъ.

2) Положимъ, что числа a и b состоятъ только изъ множителей числа 2 и изъ комплексныхъ единицъ. Пусть δ будетъ одинъ изъ простыхъ множителей 2, входящихъ въ одно изъ чиселъ a или b q разъ, а въ число 2—m разъ; тогда въ a_1 δ войдетъ $m + \frac{q}{2}$ разъ; слѣдоват. q должно быть четнымъ числомъ; въ b_1 δ совсѣмъ не войдетъ. Въ a_2 δ войдетъ $2m + \frac{q-2m}{4}$ разъ и не войдетъ совсѣмъ въ b_2 и т. д. Вообще въ a_μ δ войдетъ $2m + \frac{q-2m}{2^\mu}$ разъ; если q не равно $2m$, то всегда число μ можно выбрать такимъ образомъ, что $\frac{q-2m}{2^\mu}$ будетъ нечетнымъ числомъ, а въ такомъ предположеніи $a_{\mu+1}$ уже не будетъ цѣлымъ комплекснымъ числомъ.

3) Теперь разсмотримъ случай $q = 2m$ т. е. когда каждый изъ простыхъ множителей числа 2 дѣлящихъ одно изъ чиселъ a или b входитъ въ это число съ показателемъ въ два раза большимъ, чѣмъ въ число 2. Мы увидимъ, что опредѣляя въ этомъ случаѣ числа

$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3\ \ldots\ .$$

мы придемъ или къ одному изъ прежде разобранныхъ случаевъ, или будемъ все получать модули

$$k_\lambda',\ k'_{\lambda+1},\ k'_{\lambda+2}\ \ldots\ .$$

равные цѣлымъ комплекснымъ числамъ.

Въ самомъ дѣлѣ, число 2 мы можемъ представить подъ видомъ

$$2 = \gamma_1\gamma_2,$$

гдѣ γ_1 состоитъ изъ тѣхъ простыхъ идеальныхъ множителей, которые дѣлятъ a или b, а γ_2 содержитъ такіе множители 2, на которые не дѣлится ни a, ни b. По предположенію будемъ имѣть

$$ab = \gamma_1^2\varepsilon,$$

гдѣ ε — комплексная единица; слѣдовательно

$$a_1 = 2\sqrt{ab} = \gamma_1^2\gamma_2\varepsilon_1,$$

гдѣ ε_1 — также комплексная единица.

Число $a_1 = a + b$ не содержитъ, очевидно, тѣхъ простыхъ множителей 2, которые входятъ въ γ_1. Чтобы не придти къ случаямъ прежде разобраннымъ мы можемъ, какъ легко видѣть, сдѣлать только два предположенія относительно a_1: это число можетъ быть или вида $\gamma_2^3\eta_1$, гдѣ η_1—комплексная единица, или вида $\gamma_2\eta_1$, потому что иначе числа a_1 и b_1, по сокращеніи на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя, принадлежали бы къ такимъ, которыя были разобраны. Изслѣдуемъ каждое изъ этихъ предположеній отдѣльно.

a) $b_1 = \gamma_2^3\eta_1$. При этомъ

$$a_2 = 2\sqrt{a_1b_1} = 2^2\gamma_2\sqrt{\eta_1\varepsilon_1} = 2^2\gamma_2\varepsilon_2.$$

гдѣ ε_2 — комплексная единица и

$$b_2 = a_1 + b_1 = \gamma_2(\gamma_1^2\varepsilon_1 + \gamma_2^2\eta_1).$$

Такъ какъ $\gamma_1^2\varepsilon_1 + \gamma_2^2\eta_1$ не содержитъ, очевидно, ни одного множителя 2, то, чтобы не получить прежде разобранныхъ случаевъ, придется положить $\gamma_1^2\varepsilon_1 + \gamma_2^2\eta_1$ равнымъ комплексной единицѣ η_2. Итакъ

$$a_2 = 2^2\gamma_2\varepsilon_3$$

$$b_2 = \gamma_2\eta_2.$$

Совершенно такимъ же образомъ убѣдимся, что

$$a_3 = 2^2\gamma_2\varepsilon_3$$

$$b_3 = \gamma_2\eta_3,$$

гдѣ ε_3 и η_3 — комплексныя единицы и т. д.

Поэтому

$$k_2' = \frac{a_2}{b_2},\ k_3' = \frac{a_3}{b_3} \text{ и т. д.}$$

будутъ равны цѣлымъ комплекснымъ числамъ.

b) $b_1 = \gamma_2\eta_1$. При этомъ

$$a_2 = 2\sqrt{a_1b_1} = \gamma_1^2\gamma_2^2\sqrt{\varepsilon_1\eta_1} = \gamma_1^2\gamma_2^2\varepsilon_2,$$

гдѣ ε_2 — комплексная единица и

$$b_2 = a_1 + b_1 = \gamma_2(\gamma_1^2\varepsilon_1 + \eta_1).$$

Такъ какъ $\gamma_1^2\varepsilon_1 + \eta_1$ не содержитъ простыхъ множителей 2 входящихъ въ γ_1, то, чтобы не получить случаевъ уже разобранныхъ, придется положить

$$\gamma_1^2\varepsilon_1 + \eta_1 = \gamma_2\eta_2,$$

гдѣ η_2 — комплексная единица.

Итакъ

$$a_2 = \gamma_1^2\gamma_2^2\varepsilon_2$$

$$b_2 = \gamma_2^2\eta_2.$$

Разсуждая подобнымъ же образомъ найдемъ, что

$$a_3 = \gamma_1^2\gamma_2^3\varepsilon_3, \; b_3 = \gamma_2^3\eta_3,$$

ε_3 и η_3 комплексныя единицы и т. д. Поэтому

$$k_2' = \frac{a_2}{b_2}, \; k_3' = \frac{a_2}{b_3} \text{ и т. д.}$$

будутъ равны цѣлымъ комплекснымъ числамъ. Въ слѣдующемъ n^0 мы докажемъ, что число такихъ чиселъ ограниченное.

4) Положимъ, наконецъ, что a и b равны комплекснымъ единицамъ. Такъ какъ $\sqrt{ab}$ долженъ быть цѣлымъ комплекснымъ числомъ, то онъ будетъ равенъ комплексной единицѣ. Если число b_1 содержитъ какой нибудь простой идеальный множитель простаго нечетнаго числа, а также если $a + b$ не будетъ дѣлиться хотя на одинъ простой множитель числа 2, то разсматриваемый случай сведется къ прежнимъ случаямъ, для этого стоитъ только взять вмѣсто a и b a_1 и b_1. Итакъ надобно принять, что $a + b$ состоитъ изъ всѣхъ простыхъ множителей числа 2. Пусть δ будетъ одинъ изъ этихъ множителей входящихъ въ 2 съ показателемъ m, а въ $a + b$ съ показателемъ μ.

Полагая, при $m > \mu$,

$$a_1 = \delta^\mu a_1', \; b_1 = \delta^\mu b_1'$$

$$a_2 = \delta^\mu a_2', \; b_2 = \delta^\mu b_2'$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

имѣемъ

$$a_1' = \frac{2\sqrt{ab}}{\delta^\mu}, \; b_1' = \frac{a + b}{\delta^\mu},$$

$$a_2' = 2\sqrt{a_1'b_1'}, \; b_2' = a_1' + b_1'$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Такъ какъ a_1' дѣлится на δ, а b_1'—не дѣлится, то мы опять приходимъ ко 2-му случаю, только

$$a, \; b, \; a_1, \; b_1 \; . \; . \; . \; ,$$

надобно замѣнить черезъ

$$a_1', \; b_1', \; a_2', \; b_2', \; . \; .$$

Совершенно также, полагая, при $m < \mu$,

$$a_1 = \delta^m a_1', \quad b_1 = \delta^m b_1',$$
$$a_2 = \delta^m a_2', \quad b_2 = \delta^m b_2'$$
$$\dots\dots\dots$$

нашли бы, что этотъ случай сводится ко 2-му или 3-му.

Поэтому остается предположить, что всякій простой множитель числа 2 входитъ съ тѣмъ же показателемъ въ число $a + b$ какъ и въ 2.

Тогда отношеніе $\frac{a+b}{2}$ будетъ равняться комплексной единицѣ. Итакъ величины

$$k' = \frac{a}{b}, \quad k_1' = \frac{a_1}{b_1}$$

равны комплекснымъ единицамъ.

Такъ что разсматриваемый случай только тогда не сводится къ предыдущимъ, когда величины

$$k', \; k_1', \; k_2' \; \dots$$

будутъ выходить равными комплекснымъ единицамъ т. е. цѣлымъ комплекснымъ числамъ.

78.

Теперь мы докажемъ, что не можетъ существовать безконечнаго множества цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ k_λ', $k'_{\lambda+1}$, ... , находящихся въ зависимости

$$k'_{\mu+1} = \frac{2\sqrt{k'_\mu}}{1+k'_\mu},$$

гдѣ μ — какое нибудь цѣлое число большее λ.

Значенія $k_\lambda', \; k'_{\lambda+1}, \; \dots,$

соотвѣтствующія одному корню уравненія

$$F(v) = 0,$$

какъ дополнительные модули вещественныхъ эллиптическихъ интеграловъ, будутъ вещественныя положительныя и меньшія единицы. Точно также какъ и значенія

$$\sqrt{k_\lambda'}, \; \sqrt{k'_{\lambda+1}} \; \dots$$

Замѣчая, что эти послѣднія количества суть также цѣлыя комплексныя числа, положимъ

$$k_\lambda' = \zeta^2, \; k'_{\lambda+1} = \zeta_1^2, \; k'_{\lambda+2} = \zeta_2^2 \text{ и т. д.}$$

гдѣ цѣлыя комплексныя числа

$$\zeta, \; \zeta_1, \; \zeta_2 \; \dots$$

будутъ находиться между собою въ такой зависимости:

$$\zeta^2_{\mu+1} = \frac{2\zeta_\mu}{1+\zeta^2_\mu}. \tag{1}$$

Изъ этого уравненія получаются два значенія $\zeta_{\mu+1}$; изъ нихъ мы выбираемъ то, которое при извѣстномъ корнѣ уравненія

$$F(v) = 0,$$

будетъ положительнымъ

Мы допустимъ, что дѣйствительно существуетъ неопредѣленно большое число цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ

$$\zeta, \ \zeta_1, \ \zeta_2 \dots .$$

и докажемъ, что вслѣдствіе этого является противорѣчіе. Представимъ себѣ для каждаго числа всѣ его сопряженныя значенія, соотвѣтствующія остальнымъ корнямъ уравненія

$$F(v) = 0,$$

степень котораго мы означили выше черезъ n. Такъ что получится n рядовъ величинъ

$$\begin{array}{llll} \zeta, & \zeta_1, & \zeta_2 & \dots . \\ \zeta', & \zeta_1', & \zeta_2' & \dots . \\ \zeta'', & \zeta_1'', & \zeta_2'' & \dots ., \end{array}$$

изъ которыхъ каждый содержитъ неопредѣленно большое число членовъ

Разсмотримъ въ каждомъ изъ этихъ рядовъ N первыхъ членовъ, гдѣ N произвольное число, и выкинемъ изъ совокупности

$$\begin{array}{lllll} \zeta, & \zeta_1, & \zeta_2 & \dots . & \zeta_{N-1} \\ \zeta', & \zeta_1', & \zeta_2' & \dots . & \zeta'_{N-1} \\ \zeta'', & \zeta_1'', & \zeta_2'' & \dots . & \zeta''_{N-1} \\ . & . & . & . & . \end{array}$$

каждое количество $\zeta_\mu^{(\nu)}$ и всѣ съ нимъ сопряженныя, если модуль одного изъ нихъ превосходитъ нѣкоторый предѣлъ R, который мы укажемъ ниже.

Такъ что у насъ останутся системы

$$\begin{array}{llll} \zeta_\alpha, & \zeta_\beta, & \zeta_\gamma & \dots . \\ \zeta_\alpha', & \zeta_\beta', & \zeta_\gamma' & \dots . \\ \zeta_\alpha'', & \zeta_\beta'', & \zeta_\gamma'' & \dots . \\ . & . & . & . \end{array}$$

составленныя изъ количествъ, модули которыхъ меньше R.

Мы увидимъ, что для R можно выбрать такое значеніе, что число этихъ системъ превзойдетъ всякій предѣлъ съ увеличеніемъ числа N до безконечности. Одно изъ такихъ значеній R будетъ положительнымъ корнемъ уравненія

$$\omega R^2 - 2R - \omega = 0, \tag{2}$$

гдѣ

$$\omega = \left(\frac{\sigma - 2}{\sigma}\right)^{2^{h-1}} \cdot \frac{1}{\sigma^{2^h-2}};$$

h цѣлое число, превышающее n, степень уравненія

$$F(v) = 0,$$

и σ число большее 2.

Дѣйствительно, пусть модуль, $\rho_\mu^{(\nu)}$, какой нибудь величины, $\zeta_\mu^{(\nu)}$, превосходитъ R. Изъ формулы

$$(\zeta_{\mu+1}^{(\nu)})^2 = \frac{2\zeta_\mu^{(\nu)}}{1+(\zeta_\mu^{(\nu)})^2},$$

видно, что модуль, $\rho_{\mu+1}^{(\nu)}$, величины $\zeta_{\mu+1}^{(\nu)}$, удовлетворяетъ неравенству

$$(\rho_{\mu+1}^{(\nu)})^2 < \frac{2\rho_\mu^{(\nu)}}{(\rho_\mu^{(\nu)})^2 - 1}; \tag{3}$$

потому что модуль

$$1 + (\zeta_\mu^{(\nu)})^2$$

не меньше

$$(\rho_\mu^{(\nu)})^2 - 1.$$

Такъ какъ функція

$$\frac{2x}{x^2 - 1}$$

убываетъ при увеличеніи x, когда $x > 1$, то, замѣчая, что, по предположенію,

$$\rho_\mu^{(\nu)} > R$$

и R больше единицы, получимъ изъ неравенства (3) такое:

$$(\rho_{\mu+1}^{(\nu)})^2 < \frac{2R}{R^2 - 1}.$$

Принимая во вниманіе, что по уравненію (2)

$$\frac{2R}{R^2 - 1} = \omega,$$

имѣемъ

$$(\rho_{\mu+1}^{(\nu)})^2 < \omega = \left(\frac{\sigma - 2}{\sigma}\right)^{2^{h-1}} \cdot \frac{1}{\sigma^{2^h-2}}. \tag{4}$$

Мы докажемъ теперь, что модули всѣхъ количествъ

$$\zeta_{\mu+1}^{(\nu)},\ \zeta_{\mu+2}^{(\nu)} \ldots \ldots \zeta_{\mu+h}^{(\nu)}$$

т. е. величины

$$\rho_{\mu+1}^{(\nu)},\ \rho_{\mu+2}^{(\nu)} \ldots \ldots \rho_{\mu+h}^{(\nu)}$$

будутъ меньше

$$\sqrt{\frac{\sigma-2}{\sigma}}.$$

Это очевидно изъ неравенства (4) для $\rho^{(\nu)}_{\mu+1}$. Далѣе, изъ формулы

$$(\zeta^{(\nu)}_{\mu+2})^2 = \frac{2\zeta^{(\nu)}{}_{\mu+1}}{1+(\zeta^{(\nu)}{}_{\mu+1})^2},$$

такъ какъ

$$\rho^{(\nu)}_{\mu+1} < \sqrt{\frac{\sigma-2}{\sigma}} < 1,$$

имѣемъ

$$(\rho^{(\nu)}_{\mu+2})^2 < \frac{2\rho^{(\nu)}{}_{\mu+1}}{1-(\rho^{(\nu)}{}_{\mu+1})^2}.$$

Замѣчая, что

$$\frac{2\rho^{(\nu)}{}_{\mu+1}}{1-(\rho^{(\nu)}{}_{\mu+1})^2} < \sigma\rho^{(\nu)}_{\mu+1}$$

или, что тоже самое,

$$1-(\rho^{(\nu)}_{\mu+1})^2 > \frac{2}{\sigma};$$

потому что

$$\rho^{(\nu)}_{\mu+1} < \sqrt{\frac{\sigma-2}{\sigma}},$$

мы находимъ

$$(\rho^{(\nu)}_{\mu+2})^2 < \sigma\rho^{(\nu)}_{\mu+1}$$

Отсюда по (4)

$$(\rho^{(\nu)}_{\mu+2})^2 < \left(\frac{\sigma-2}{\sigma}\right)^{2^{h-2}} \cdot \frac{1}{\sigma^{2^{h-1}-2}} \tag{5}$$

и, слѣдовательно,

$$(\rho^{(\nu)}_{\mu+2})^2 < \frac{\sigma-2}{\sigma}.$$

Продолжая тѣже разсужденія, найдемъ

$$(\rho^{(\nu)}_{\mu+3})^2 < \left(\frac{\sigma-2}{\sigma}\right)^{2^{h-3}} \cdot \frac{1}{\sigma^{2^{h-2}-2}};$$

слѣдовательно,

$$(\rho^{(\nu)}_{\mu+3})^2 < \frac{\sigma-2}{\sigma}$$

и, наконецъ,

$$(\rho^{(\nu)}_{\mu+h})^2 < \frac{\sigma-2}{\sigma}.$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что если модуль одного изъ членовъ ряда

$$\zeta^{(\nu)},\ \zeta^{(\nu)}_1,\ \zeta^{(\nu)}_2 \ldots .$$

будетъ больше R, то модули всѣхъ h членовъ, слѣдующихъ непосредственно послѣ этого, будутъ меньше $\sqrt{\frac{\sigma-2}{\sigma}}$ и, слѣдовательно, меньше R. Отсюда слѣдуетъ, что число тѣхъ изъ количествъ

$$\zeta^{(\nu)},\ \zeta^{(\nu)}_1 \ldots . \zeta^{(\nu)}{}_{N-1},$$

модули которыхъ больше R, не можетъ быть больше M (цѣлое число), если

$$\frac{N}{h} < M;$$

за M можно принять ближайшее цѣлое число большее $\frac{N}{h}$.

Изъ сказаннаго видно, что число членовъ въ совокупности

$$\begin{array}{l} \zeta, \ \zeta_1 \ \ldots . \ \zeta_{N-1} \\ \zeta', \ \zeta_1' \ \ldots . \ \zeta'_{N-1} \\ \zeta'', \zeta_1'' \ \ldots . \ \zeta''_{N-1}, \\ \ldots \ldots \end{array}$$

модули которыхъ больше R, не превосходитъ числа nM. Если мы выбросимъ всѣ эти члены и имъ сопряженные, то у насъ останутся ещё количества

$$\zeta_\alpha, \ \zeta_\beta, \ \zeta_\gamma \ \ldots .$$

и ихъ сопряженныя, модули которыхъ не превосходятъ числа R.

Число этихъ величинъ

$$\zeta_\alpha, \ \zeta_\beta, \ \zeta_\gamma \ \ldots .$$

будетъ больше $N - nM$. Такъ какъ M есть ближайшее цѣлое число большее $\frac{N}{h}$ и $h > n$, то $N - nM$ съ возрастаніемъ N превзойдетъ всякое данное число.

Итакъ доказано, что въ ряду комплексныхъ чиселъ

$$\zeta, \ \zeta_1, \ \zeta_2, \ \ldots .$$

будетъ сколько угодно такихъ, которыхъ модули, при всѣхъ корняхъ уравненія

$$F(v) = 0,$$

будутъ меньше R.

Но намъ извѣстно, что число такихъ различныхъ комплексныхъ чиселъ ограниченное (n^0 26) и, слѣдовательно, нѣкоторыя изъ комплексныхъ чиселъ должны повторяться, а этого, какъ мы сейчасъ увидимъ, не можетъ случиться.

Разсмотримъ тотъ корень уравненія

$$F(v) = 0,$$

при которомъ всѣ величины

$$\zeta, \ \zeta_1, \ \zeta_2 \ \ldots .$$

положительныя. По формулѣ

$$\zeta^2_{\mu+1} = \frac{2\zeta_\mu}{1 + \zeta^2_\mu}$$

видно, что величины

$$\zeta_1, \ \zeta_2 \ \ldots . ,$$

оставаясь меньше единицы, возрастаютъ постоянно и, слѣдовательно, періодичности быть не можетъ.

Нельзя предположить, что эти величины достигнутъ единицы, потому что если бы какая нибудь величина ζ_μ была равна единицѣ, то и всѣ предшествующія величины

$$\zeta,\ \zeta_1\ \ldots\ .\ \zeta_{\mu-1}$$

будутъ равны единицѣ, и слѣдовательно всѣ модули

$$k',\ k_1',\ k_2'\ \ldots\ .$$

были бы равны единицѣ. Такъ какъ

$$k' = \sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\alpha(\beta-1)}} = 1,$$

то

$$\alpha = 1,$$

чего мы не предполагаемъ.

79.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что намъ достаточно только разсмотрѣть дифференціалы

$$\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}},$$

интегралы которыхъ находятся по формулѣ

$$\int\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}} = C\log(P+Q\sqrt{x(x-1)\,(x-\alpha)\,(x-\beta)}),$$

гдѣ P цѣлая функція нечетной степени.

Намъ извѣстно, что вычисляя въ этомъ случаѣ параметры α_1, β_1, α_2, β_2 и т. д. по формуламъ

$$\alpha_1 = \left(\frac{\alpha+\beta-1}{1+\beta-\alpha}\right)^2,\quad \beta_1 = \left(\frac{\alpha+\beta-1}{1+\alpha-\beta}\right)^2$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{\alpha_1+\beta_1-1}{1+\beta_1-\alpha_1}\right)^2,\quad \beta_2 = \left(\frac{\alpha_1+\beta_1-1}{1+\alpha_1-\beta_1}\right)^2$$

. . . .

мы придемъ снова къ параметрамъ α_1, β_1, и затѣмъ параметры начнутъ повторяться періодически. Чтобы найти предѣлъ для числа членовъ періода, мы снова воспользуемся теоріею комплексныхъ чиселъ.

Положимъ опять, что α и β выражены раціональными функціями одного параметра v, удовлетворяющаго неприводимому уравненію

$$F(v) = 0$$

степени n.

Очевидно, что всѣ параметры

$$\alpha_1,\ \beta_1,\ \alpha_2,\ \beta_2 \text{ и т. д.}$$

выразятся раціонально черезъ v.

Положимъ, что

$$\alpha = \frac{l}{m}, \ \beta = \frac{l}{p},$$

гдѣ l, m, p, — нѣкоторыя цѣлыя комплексныя числа; такъ что α и β приведены къ общему числителю. Пусть вообще

$$\alpha_i = \frac{l_i}{m_i}, \ \beta_i = \frac{l_i}{p_i}.$$

Тогда по общимъ формуламъ

$$\alpha_{i+1} = \left(\frac{\alpha_i + \beta_i - 1}{1 + \beta_i - \alpha_i}\right)^2, \ \beta_{i+1} = \left(\frac{\alpha_i + \beta_i - 1}{1 + \alpha_i - \beta_i}\right)^2$$

будемъ имѣть

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} l_{i+1} &= (l_i m_i + l_i p_i - m_i p_i)^2 \\ m_{i+1} &= (m_i p_i + m_i l_i - p_i l_i)^2 \\ p_{i+1} &= (p_i l_i + p_i m_i - l_i m_i)^2. \end{aligned} \right.$$

Изъ этихъ формулъ выводятся такія:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} l_{i+1} - m_{i+1} &= 4 l_i m_i p_i \, (l_i - m_i) \\ l_{i+1} - p_{i+1} &= 4 l_i m_i p_i \, (l_i - p_i); \end{aligned} \right.$$

слѣдовательно

$$(3) \qquad l_{i+1} - m_{i+1} = 4^{i+1} l l_1 \ldots . l_i m m_1 \ldots . m_i p p_1 \ldots . p_i (l - m)$$

$$(4) \qquad l_{i+1} - p_{i+1} = 4^{i+1} l l_1 \ldots . l_i m m_1 \ldots . m_i p p_1 \ldots p_i (l - p).$$

Изъ формулъ (3) и (4) находимъ

$$(l_{i+1} - m_{i+1}) \, (l - p) - (l_{i+1} - p_{i+1}) \, (l - m) = 0$$

т. е.

$$(5) \qquad l_{i+1}(m - p) + m_{i+1}(p - l) + p_{i+1}(l - m) = 0.$$

При помощи этихъ соотношеній между числами l_{i+1}, m_{i+1}, p_{i+1} можно показать, что, если какой нибудь простой идеальный множитель d, недѣлящій числа 2, дѣлитъ два какія нибудь изъ чиселъ

$$l_{i+1}, \ m_{i+1}, \ p_{i+1},$$

то онъ дѣлитъ также и два какія нибудь изъ чиселъ

$$l_i, \ m_i, \ p_i.$$

Положимъ, напримѣръ, что d дѣлитъ m_{i+1} и p_{i+1}; въ такомъ случаѣ и разность

$$m_{i+1} - p_{i+1} = 4 l_i m_i p_i (m_i - p_i)$$

дѣлится на d. Поэтому d дѣлитъ одно изъ чиселъ

$$l_i, \ m_i, \ p_i, \ m_i - p_i.$$

Если мы допустимъ, что d дѣлитъ l_i, то изъ формулы

$$m_{i+1} = (m_ip_i + m_il_i - p_il_i)^2$$

увидимъ, что онъ дѣлитъ также и m_ip_i, потому что l_i и m_{i+1} — дѣлятся на d; такъ что одно изъ чиселъ m_i, p_i дѣлится на d, которое такимъ образомъ дѣлитъ по крайней мѣрѣ два изъ чиселъ l_i, m_i, p_i. Тоже самое нашли бы, допустивъ, что на d дѣлится не l_i, а m_i или p_i. Наконецъ, принимая, что на d дѣлится $m_i - p_i$, изъ той же формулы

$$m_{i+1} = (m_ip_i + l_i(m_i - p_i))^2$$

найдемъ, что m_ip_i и, слѣдовательно, одно изъ чиселъ m_i, p_i дѣлится на d. Такъ какъ разность $m_i - p_i$ также дѣлится на d, то d дѣлитъ каждое изъ чиселъ m_i и p_i. Итакъ доказано, что во всякомъ случаѣ два изъ чиселъ,

$$l_i,\ m_i,\ p_i$$

дѣлятся на d. Отсюда слѣдуетъ, что d дѣлитъ по крайней мѣрѣ два изъ чиселъ

$$l_{i-1},\ m_{i-1},\ p_{i-1}$$

и т. д. Продолжая разсуждать такимъ образомъ далѣе, покажемъ, что d дѣлитъ по крайней мѣрѣ два изъ чиселъ

$$l,\ m,\ p.$$

Изъ этого мы заключаемъ, что число простыхъ множителей, которые дѣлятъ разомъ два изъ чиселъ

$$l_i,\ m_i,\ p_i$$

всегда ограниченное. Къ этимъ множителямъ, кромѣ дѣлящихъ 2, могутъ принадлежать только тѣ числа, которыя дѣлятъ разомъ по крайней мѣрѣ два изъ чиселъ

$$l,\ m,\ p.$$

Обратно, каждый общій дѣлитель двухъ изъ чиселъ

$$l,\ m,\ p$$

дѣлитъ каждое изъ чиселъ

$$l_1,\ m_1,\ p_1$$

и, слѣдовательно, каждое изъ чиселъ

$$l_i,\ m_i,\ p_i,$$

какъ показываютъ формулы (1)

Положимъ теперь, что

$$\int \frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}$$

выражается въ логариѳмахъ; такъ что, вычисляя параметры

$$\alpha_1,\ \beta_1,\ \alpha_2,\ \beta_2\ .\ .\ .\ ,$$

мы непремѣнно придемъ къ параметрамъ α_σ, β_σ, равнымъ соотвѣтственно α_1, β_1. Поэтому будемъ имѣть равенства

$$(6)\qquad \frac{l_\sigma}{m_\sigma}=\frac{l_1}{m_1},\quad \frac{l_\sigma}{p_\sigma}=\frac{l_1}{p_1}.$$

Такъ какъ общій наибольшій дѣлитель комплексныхъ чиселъ l_1, m_1, p_1 будетъ также общимъ дѣлителемъ чиселъ l_σ, m_σ, p_σ, то изъ равенствъ (6) получаются такія:

$$l_\sigma = Dl_1,\ m_\sigma = Dm_1,\ p_\sigma = Dp_1,$$

гдѣ D есть цѣлое комплексное число.

По замѣченному выше, D можетъ дѣлиться только на множители числа 2 и на идеальные множители, дѣлящіе разомъ по крайней мѣрѣ два изъ чиселъ l, m, p.

Изъ уравненія

$$l_\sigma - m_\sigma = 4^{\sigma-1} l_1 l_2 \dots l_{\sigma-1} m_1 m_2 \dots m_{\sigma-1} p_1 p_2 \dots p_{\sigma-1}(l_1 - m_1)$$

слѣдуетъ, что

$$D = 4^{\sigma-1} l_1 l_2 \dots l_{\sigma-1} m_1 m_2 \dots m_{\sigma-1} p_1 p_2 \dots p_{\sigma-1}.$$

Отсюда мы заключаемъ, что въ томъ случаѣ, когда параметры α и β повторяются періодически, числа

$$\begin{matrix} l_1, & l_2 & \dots l_{\sigma-1} \\ m_1, & m_2 & \dots m_{\sigma-1} \\ p_1, & p_2 & \dots p_{\sigma-1} \end{matrix}$$

могутъ дѣлиться только на такіе простые идеальные множители, которые дѣлятъ разомъ по крайней мѣрѣ два изъ чиселъ

$$2l,\ 2m,\ 2p.$$

Итакъ, если одно изъ чиселъ

$$\begin{matrix} l_1, & l_2 & \dots \\ m_1, & m_2 & \dots \\ p_1, & p_2 & \dots, \end{matrix}$$

вычисляемыхъ по формуламъ (1), будетъ дѣлиться на простой идеальный множитель, недѣлящій по крайней мѣрѣ двухъ изъ чиселъ

$$2l,\ 2m,\ 2p,$$

то періодичности параметровъ быть не можетъ и интегралъ

$$\int\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}$$

не выражается въ логариѳмахъ.

Мы докажемъ, что въ противномъ случаѣ, послѣ конечнаго числа дѣйствій, мы придемъ къ параметрамъ α_σ, β_σ, равнымъ соотвѣтственно α_1, β_1.

80.

Пусть
$$\delta_1,\ \delta_2\ \ldots .\ \delta_s$$
будутъ всѣ различные простые идеальные множители, дѣлящіе по крайней мѣрѣ два изъ чиселъ
$$2l,\ 2m,\ 2p.$$

Изъ предыдущаго видно, что въ томъ случаѣ, когда интегралъ
$$\int \frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}$$
берется въ логариѳмахъ, числа
$$l_i,\ m_i,\ p_i$$
представятся подъ видомъ
$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} l_i &= \delta_1^{\varepsilon_1}\delta_2^{\varepsilon_2}\ \ldots .\ \delta_s^{\varepsilon_s}L_i \\ m_i &= \delta_1^{\eta_1}\delta_2^{\eta_2}\ \ldots .\ \delta_s^{\eta_s}M_i \\ p_i &= \delta_1^{\omega_1}\delta_2^{\omega_2}\ \ldots .\ \delta_s^{\omega_s}P_i, \end{aligned}\right.$$
гдѣ
$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varepsilon_1,\ \varepsilon_2\ \ldots .\ \varepsilon_s \\ \eta_1,\ \eta_2\ \ldots .\ \eta_s \\ \omega_1,\ \omega_2\ \ldots .\ \omega_s \end{array}\right.$$
цѣлыя положительныя числа или нули и L_i, M_i, P_i — комплексныя единицы. Относительно показателей (2) мы сдѣлаемъ слѣдующія замѣчанія:

I. Если показатель какого нибудь множителя δ въ одномъ изъ чиселъ
$$l_i,\ m_i,\ p_i$$
будетъ больше чѣмъ въ двухъ остальныхъ, то въ каждое изъ чиселъ
$$l_{i+1},\ m_{i+1},\ p_{i+1}$$
этотъ множитель войдетъ съ однимъ и тѣмъ показателемъ; тоже самое будетъ имѣть мѣсто относительно чиселъ
$$l_{i+2},\ m_{i+2},\ p_{i+2}$$
и всѣхъ послѣдующихъ системъ.

Положимъ, напримѣръ, что
$$\varepsilon_1 > \eta_1 \text{ и } \varepsilon_1 > \varpi_1.$$
Множитель δ_1 войдетъ въ числа
$$l_i m_i,\ l_i p_i,\ m_i p_i$$
соотвѣтственно
$$\varepsilon_1 + \eta_1,\ \varepsilon_1 + \varpi_1,\ \eta_1 + \varpi_1$$
разъ. По предположенію, $\eta_1 + \varpi_1$ будетъ самое меньшее изъ трехъ чиселъ.

Изъ формулъ

$$l_{i+1} = (l_i m_i + l_i p_i - m_i p_i)^2$$
$$m_{i+1} = (l_i m_i + m_i p_i - l_i p_i)^2$$
$$p_{i+1} = (m_i p_i + l_i p_i - m_i l_i)^2$$

видно, что множитель δ_1 войдетъ въ каждое изъ чиселъ

$$l_{i+1},\ m_{i+1},\ p_{i+1}$$

$2(\eta_1 + \varpi_1)$ разъ, а формулы

$$l_{i+1} - m_{i+1} = 4 l_i m_i p_i (l_i - m_i)$$
$$l_{i+1} - p_{i+1} = 4 l_i m_i p_i (l_i - p_i)$$
$$m_{i+1} - p_{i+1} = 4 l_i m_i p_i (m_i - p_i)$$

показываютъ, что въ каждую изъ разностей

$$l_{i+1} - m_{i+1},\ l_{i+1} - p_{i+1},\ m_{i+1} - p_{i+1}$$

δ_1 войдетъ въ степени выше чѣмъ $2(\eta_1 + \varpi_1)$. На основаніи этого, по формуламъ

$$l_{i+2} = (l_{i+1} m_{i+1} + p_{i+1}(l_{i+1} - m_{i+1}))^2$$
$$m_{i+2} = (m_{i+1} p_{i+1} + l_{i+1}(m_{i+1} - p_{i+1}))^2$$
$$p_{i+2} = (p_{i+1} l_{i+1} + m_{i+1}(p_{i+1} - l_{i+1}))^2$$

заключаемъ, что въ каждое изъ чиселъ

$$l_{i+2},\ m_{i+2},\ p_{i+2}$$

множитель δ_1 войдетъ съ однимъ и тѣмъ же показателемъ $2^4(\eta_1 + \varpi_1)$, а формулы

$$l_{i+2} - m_{i+2} = 4 l_{i+1} m_{i+1} p_{i+1} (l_{i+1} - m_{i+1})$$
$$l_{i+2} - p_{i+2} = 4 l_{i+1} m_{i+1} p_{i+1} (l_{i+1} - p_{i+1})$$
$$m_{i+2} - p_{i+2} = 4 l_{i+1} m_{i+1} p_{i+1} (m_{i+1} - p_{i+1})$$

показываютъ, что въ каждую изъ разностей

$$l_{i+2} - m_{i+2},\ l_{i+2} - p_{i+2},\ m_{i+2} - p_{i+2},$$

множитель δ_1 войдетъ съ показателемъ большимъ $2^4(\eta_1 + \varpi_1)$. Тоже самое получится относительно системы

$$l_{i+3},\ m_{i+3},\ p_{i+3}$$

и слѣдующихъ системъ.

II. Если показатели какого нибудь множителя δ у двухъ изъ чиселъ

$$l_i,\ m_i,\ p_i$$

равны между собою, а въ третьемъ числѣ показатель того же множителя меньше, то разность между этими показателями будетъ меньше извѣстнаго конечнаго предѣла.

Положимъ, напримѣръ, что

$$\varepsilon_1 = \eta_1 > \varpi_1$$

и докажемъ, что общая величина разностей

$$\varepsilon_1 - \varpi_1, \ \eta_1 - \varpi_1$$

не превосходитъ извѣстнаго предѣла.

Перемѣняя въ уравненіи (5) n^0 79 значекъ $i + 1$ на i, получимъ

$$l_i(m - p) + m_i(p - l) + p_i(l - m) = 0.$$

Изъ этого равенства слѣдуетъ, что $p_i(l - m)$ дѣлится на $\delta_1^{\varepsilon_1} = \delta_1^{\eta_1}$; такъ какъ p_i содержитъ δ_1 въ степени ϖ_1, то $l - m$ дѣлится на $\delta_1^{\varepsilon_1 - \varpi_1}$ и, слѣдовательно, $\varepsilon_1 - \varpi_1$ не должно превышать показателя, съ которымъ δ_1 входитъ въ $l - m$.

81.

На основаніи формулъ (1) предыдущаго n^0 параметры α_i и β_i могутъ быть представлены подъ видомъ

$$\alpha_i = \mathfrak{A}_i \sigma_i$$

$$\beta_i = \mathfrak{B}_i \tau_i,$$

гдѣ

$$\mathfrak{A}_i = \delta_1^{\varepsilon_1 - \eta_1} \delta_2^{\varepsilon_2 - \eta_2} \ldots . \delta_s^{\varepsilon_s - \eta_s}$$

$$\mathfrak{B}_i = \delta_1^{\varepsilon_1 - \omega_1} \delta_2^{\varepsilon_2 - \omega_2} \ldots . \delta_s^{\varepsilon_s - \omega_s}$$

суть раціональныя комплексныя числа, а

$$\sigma_i = \frac{L_i}{M_i}, \ \tau_i = \frac{L_i}{P_i}$$

комплексныя единицы.

Свойства показателей

$$\varepsilon_1, \ \varepsilon_2 \ \ldots . \ \varepsilon_s$$

$$\eta_1, \ \eta_2 \ \ldots . \ \eta_s$$

$$\varpi_1, \ \varpi_2 \ \ldots . \ \varpi_s,$$

замѣченныя въ предыдущемъ n^0, позволяютъ намъ легко доказать, что число различныхъ значеній

$$\mathfrak{A}_1, \ \mathfrak{A}_2 \ldots .$$

$$\mathfrak{B}_1, \ \mathfrak{B}_2 \ \ldots$$

ограниченное.

Дѣйствительно, положимъ что вычислено сколько угодно системъ чиселъ

$$l_1,\ m_1,\ p_1$$
$$l_2,\ m_2,\ p_2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Выключимъ тѣ изъ этихъ системъ, въ которыхъ показатель какого нибудь множителя δ въ одномъ изъ чиселъ

$$l_i,\ m_i,\ p_i$$

больше чѣмъ въ двухъ другихъ. По замѣченному выше (n^0 80), для каждаго множителя δ можетъ быть только одна такая система. Такъ что число исключенныхъ системъ не можетъ быть больше s, числа всѣхъ множителей δ. Для каждой изъ оставшихся системъ

$$l_i,\ m_i,\ p_i$$

какой угодно множитель δ войдетъ или съ однимъ и тѣмъ же показателемъ во всѣ три числа, или въ одно изъ нихъ съ показателемъ меньшимъ чѣмъ въ два другія, которыя содержатъ его съ одинаковымъ показателемъ. Такъ какъ въ этомъ случаѣ численныя величины разностей (n^0 80, II)

$$\varepsilon_1 - \eta_1,\ \varepsilon_2 - \eta_2\ \ldots\ldots\ \varepsilon_s - \eta_s$$
$$\varepsilon_1 - \varpi_1,\ \varepsilon_2 - \varpi_2\ \ldots\ldots\ \varepsilon_s - \varpi_s$$

не превзойдутъ извѣстныхъ предѣловъ, то число различныхъ раціональныхъ комплексныхъ чиселъ

$$\mathfrak{A}_i = \delta_1^{\varepsilon_1-\eta_1}\delta_2^{\varepsilon_2-\eta_2}\ \ldots\ldots\ \delta_s^{\varepsilon_s-\eta_s}\ .$$
$$\mathfrak{B}_i = \delta_1^{\varepsilon_1-\omega_1}\delta_2^{\varepsilon_2-\omega_2}\ \ldots\ldots\ \delta_s^{\varepsilon_s-\omega_s}$$

ограничено.

82.

Теперь уже не трудно будетъ доказать, что число различныхъ значеній параметровъ α_i и β_i не превосходитъ нѣкотораго предѣла, если интегралъ

$$\int \frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}$$

выражается въ логариѳмахъ.

Прежде всего замѣтимъ, что модуль одного изъ параметровъ α_i, β_i, при каждомъ значкѣ i и при каждомъ корнѣ уравненія

$$F(v) = 0$$

(параметры α_i и β_i суть раціональныя комплексныя числа отъ корня этого уравненія), будетъ меньше нѣкотораго конечнаго числа A.

Дѣйствительно, изъ равенства

$$\frac{\beta_i - \alpha_i}{\alpha_i(\beta_i - 1)} = k'^2,$$

которое можетъ быть представлено подъ видомъ

$$\frac{1}{\alpha_i} - k^2 \frac{1}{\beta_i} = k'^2,$$

слѣдуетъ, что модули $\frac{1}{\alpha_i}$ и $\frac{1}{\beta_i}$ не могутъ быть разомъ какъ угодно малы, такъ какъ модуль k' при всѣхъ корняхъ уравненія

$$F(v) = 0$$

есть величина конечная, отличная отъ нуля.

Вслѣдствіе этого понятно, что одинъ изъ модулей α и β_i не превосходитъ нѣкотораго конечнаго числа A, которое можно принять большимъ $\frac{1}{5}$, какъ для насъ это будетъ нужно. Для доказательства періодичности α_i и β_i мы употребимъ здѣсь тотъ же пріемъ, которымъ пользовались въ n^0 78.

Разсмотримъ какое нибудь число N системъ параметровъ

$$|\alpha, \beta|, \; |\alpha_1, \beta_1| \; \ldots\ldots \; |\alpha_{N-1}, \beta_{N-1}|$$

и имъ сопряженныхъ

$$|\alpha', \beta'|, \; |\alpha_1', \beta_1'|, \; \ldots\ldots \; |\alpha'_{N-1}, \beta'_{N-1}|$$

$$|\alpha'', \beta''|; \; |\alpha_1'', \beta_1''| \; \ldots\ldots \; |\alpha''_{N-1}, \beta''_{N-1}|,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

соотвѣтствующихъ остальнымъ корнямъ уравненія

$$F(v) = 0.$$

Такъ что у насъ получится n рядовъ, изъ которыхъ въ каждомъ N системъ параметровъ. Исключимъ изъ этой совокупности тѣ системы $[\alpha^\nu_\mu, \beta^\nu_\mu]$ и всѣ съ ними сопряженныя

$$|\alpha_\mu, \beta_\mu|, \; |\alpha'_\mu, \beta'_\mu| \; \ldots\ldots$$

для которыхъ модуль одного изъ чиселъ

$$\alpha^\nu_\mu, \; \beta^\nu_\mu$$

превосходитъ нѣкоторый предѣлъ R (этотъ предѣлъ мы укажемъ ниже).

Тогда у насъ останутся такія системы:

$$|\alpha_a, \beta_a|, \quad |\alpha_b, \beta_b|, \quad [\alpha_c, \beta_c] \quad \ldots\ldots$$

$$|\alpha_a', \beta_a'|, \quad |\alpha_b', \beta_b'|, \quad |\alpha_c', \beta_c'| \quad \ldots\ldots$$

$$[\alpha_a'', \beta_a''|, \quad |\alpha_b'', \beta_b''|, \quad |\alpha_c'', \beta_c'']\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

у которыхъ модули всѣхъ чиселъ

$$\begin{array}{l} \alpha_a,\ \alpha_b,\ \alpha_c,\ \ldots\ \beta_a,\ \beta_b,\ \beta_c\ \ldots \\ \alpha_a',\ \alpha_b',\ \alpha_c',\ \ldots\ \beta_a',\ \beta_b',\ \beta_c'\ \ldots \\ \alpha_a'',\ \alpha_b'',\ \alpha_c'',\ \ldots\ \beta_a'',\ \beta_b'',\ \beta_c''\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

будутъ меньше R.

Для числа R, какъ мы теперь докажемъ, можно выбрать такое значеніе, что число оставшихся системъ

$$|\alpha_a, \beta_a|,\ |\alpha_b, \beta_b|,\ |\alpha_c, \beta_c|\ \ldots$$

превзойдетъ всякій предѣлъ съ увеличеніемъ N до ∞. Однимъ изъ такихъ значеній R будетъ

$$R = (A + 1)\,\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{5^h}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{5^h}} - 1}, \tag{1}$$

гдѣ h нѣкоторое цѣлое число большее n, степени уравненія

$$F(v) = 0.$$

Дѣйствительно, положимъ, что модуль одного изъ чиселъ α^{ν}_{μ}, β^{ν}_{μ} (*), напримѣръ β^{ν}_{μ}, превосходитъ R. Вычисливъ параметры $\alpha^{\nu}_{\mu+1}$ и $\beta^{\nu}_{\mu+1}$ по формуламъ

$$\left.\begin{aligned} \alpha^{\nu}_{\mu+1} &= \left(\frac{\alpha^{\nu}{}_{\mu} + \beta^{\nu}{}_{\mu} - 1}{1 + \beta^{\nu}{}_{\mu} - \alpha^{\nu}{}_{\mu}}\right)^2 \\ \beta^{\nu}_{\mu+1} &= \left(\frac{\alpha^{\nu}{}_{\mu} + \beta^{\nu}{}_{\mu} - 1}{1 + \alpha^{\nu}{}_{\mu} - \beta^{\nu}{}_{\mu}}\right)^2, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

положимъ

$$\alpha^{\nu}_{\mu+1} = 1 + \varepsilon^{\nu}_{\mu+1}$$

$$\beta^{\nu}_{\mu+1} = 1 + \eta^{\nu}_{\mu+1}.$$

Изъ формулъ (2) находимъ

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon^{\nu}_{\mu+1} &= \frac{4\beta^{\nu}{}_{\mu}(\alpha^{\nu}{}_{\mu} - 1)}{(1 + \beta^{\nu}{}_{\mu} - \alpha^{\nu}{}_{\mu})^2} = \frac{4\,\frac{\alpha^{\nu}{}_{\mu} - 1}{\beta^{\nu}{}_{\mu}}}{\left(1 + \frac{1 - \alpha^{\nu}{}_{\mu}}{\beta^{\nu}{}_{\mu}}\right)^2} \\ \eta^{\nu}_{\mu+1} &= \frac{4\alpha^{\nu}{}_{\mu}(\beta^{\nu}{}_{\mu} - 1)}{(1 + \alpha^{\nu}{}_{\mu} - \beta^{\nu}{}_{\mu})^2} = \frac{4\,\frac{\alpha^{\nu}{}_{\mu}}{\beta^{\nu}{}_{\mu}}\cdot\frac{\beta^{\nu}{}_{\mu} - 1}{\beta^{\nu}{}_{\mu}}}{\left(1 - \frac{1 + \alpha^{\nu}{}_{\mu}}{\beta^{\nu}{}_{\mu}}\right)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(*) Значекъ ν не есть показатель.

Было замѣчено, что модуль одного изъ чиселъ

$$\alpha^{\nu}_{\mu}, \ \beta^{\nu}_{\mu}$$

меньше A. Такъ какъ, по предположенію,

$$\text{мод. } \beta^{\nu}_{\mu} > R$$

и, слѣдовательно, больше A (1), то имѣетъ мѣсто неравенство

$$\text{мод. } \alpha^{\nu}_{\mu} < A.$$

Изъ формулъ (3), принимая во вниманіе, что модули величинъ

$$\frac{\alpha^{\nu}{}_{\mu} - 1}{\beta^{\nu}{}_{\mu}}, \ \frac{\alpha^{\nu}{}_{\mu}}{\beta^{\nu}{}_{\mu}}, \ \frac{\beta^{\nu}{}_{\mu} - 1}{\beta^{\nu}{}_{\mu}}$$

соотвѣтственно меньше, чѣмъ

$$\frac{A+1}{R}, \ \frac{A}{R}, \ \frac{R+1}{R},$$

а модули величинъ

$$1 + \frac{1 - \alpha^{\nu}{}_{\mu}}{\beta^{\nu}{}_{\mu}}, \ 1 - \frac{1 - \alpha^{\nu}{}_{\mu}}{\beta^{\nu}{}_{\mu}}$$

больше

$$1 - \frac{A+1}{R},$$

получимъ

$$\text{мод. } \varepsilon^{\nu}_{\mu+1} < \frac{4\,\frac{A+1}{R}}{\left(1 - \frac{A+1}{R}\right)^2}$$

$$\text{мод. } \eta^{\nu}_{\mu+1} < \frac{4\,\frac{A}{R} \cdot \frac{R+1}{R}}{\left(1 - \frac{A+1}{R}\right)^2} < \frac{4\,\frac{A+1}{R}}{\left(1 - \frac{A+1}{R}\right)^2}$$

Кромѣ того по формулѣ (1) имѣемъ

$$\frac{4\,\frac{A+1}{R}}{\left(1 - \frac{A+1}{R}\right)^2} = \frac{1}{5^k};$$

слѣдовательно модуль каждаго изъ количествъ $\varepsilon^{\nu}_{\mu+1}$, $\eta^{\nu}_{\mu+1}$ меньше $\frac{1}{5^k}$.

Переходимъ теперь къ вычисленію слѣдующей системы параметровъ

$$\alpha^{\nu}_{\mu+2} = 1 + \varepsilon^{\nu}_{\mu+2}$$

$$\beta^{\nu}_{\mu+2} = 1 + \eta^{\nu}_{\mu+2}.$$

Внося въ формулы

$$\alpha^{\nu}_{\mu+2} = \left(\frac{\alpha^{\nu}{}_{\mu+1} + \beta^{\nu}{}_{\mu+1} - 1}{1 + \beta^{\nu}{}_{\mu+1} - \alpha^{\nu}{}_{\mu+1}}\right)^2$$

$$\beta^{\nu}_{\mu+2} = \left(\frac{\alpha^{\nu}_{\mu+1} + \beta^{\nu}_{\mu+1} - 1}{1 + \alpha^{\nu}_{\mu+1} - \beta^{\nu}_{\mu+1}}\right)^2$$

вмѣсто

$$\alpha^{\nu}_{\mu+1},\ \beta^{\nu}_{\mu+1},\ \alpha^{\nu}_{\mu+2},\ \beta^{\nu}_{\mu+2}$$

ихъ значенія

$$1 + \varepsilon^{\nu}_{\mu+1},\ 1 + \eta^{\nu}_{\mu+1},\ 1 + \varepsilon^{\nu}_{\mu+2},\ 1 + \eta^{\nu}_{\mu+2},$$

находимъ

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} \varepsilon^{\nu}_{\mu+2} &= \frac{4\varepsilon^{\nu}_{\mu+1}(1 + \eta^{\nu}_{\mu+1})}{(1 + \eta^{\nu}_{\mu+1} - \varepsilon^{\nu}_{\mu+1})^2} \\ \eta^{\nu}_{\mu+2} &= \frac{4\eta^{\nu}_{\mu+1}(1 + \varepsilon^{\nu}_{\mu+1})}{(1 + \varepsilon^{\nu}_{\mu+1} - \eta^{\nu}_{\mu+1})^2} \end{aligned}\right.$$

Предполагая, что модуль каждаго изъ чиселъ

$$\varepsilon^{\nu}_{\mu+1},\ \eta^{\nu}_{\mu+1}$$

меньше какого нибудь числа r, мы находимъ по формуламъ (4), что модули $\varepsilon^{\nu}_{\mu+2}$ и $\eta^{\nu}_{\mu+2}$ меньше

$$\frac{4r(1 + r)}{(1 - 2r)^2}$$

т. е. меньше $5r$, если

$$\frac{4(1 + r)}{(1 - 2r)^2} < 5,$$

или, иначе, если

$$1 > 24r - 20r^2.$$

Это неравенство удовлетворяется, если $r < \frac{1}{5^2}$.

Было показано выше, что модули количествъ

$$\varepsilon^{\nu}_{\mu+1},\ \eta^{\nu}_{\mu+1}$$

меньше $\frac{1}{5^h}$. Поэтому мы заключаемъ, что модули каждаго изъ чиселъ

$$\varepsilon^{\nu}_{\mu+2},\ \eta^{\nu}_{\mu+2}$$

меньше $\frac{1}{5^{h-1}}$

Полагая далѣе

$$\alpha^{\nu}_{\mu+3} = 1 + \varepsilon^{\nu}_{\mu+3},\ \alpha^{\nu}_{\mu+4} = 1 + \varepsilon^{\nu}_{\mu+4}\ \ldots\ .$$

$$\beta^{\nu}_{\mu+3} = 1 + \eta^{\nu}_{\mu+3},\ \beta^{\nu}_{\mu+4} = 1 + \eta^{\nu}_{\mu+4}\ \ldots\ .$$

и продолжая тѣ же разсужденія, найдемъ, что модуль каждаго изъ количествъ

$$\varepsilon^{\nu}_{\mu+3},\ \eta^{\nu}_{\mu+3}$$

будетъ меньше $\frac{1}{5^{h-2}}$, модуль каждаго изъ количествъ

$$\varepsilon^{\nu}_{\mu+4},\ \eta^{\nu}_{\mu+4}$$

меньше $\frac{1}{5^{h-3}}$, и, наконецъ, модуль каждаго изъ количествъ

$$\varepsilon^{\nu}_{\mu+h},\ \eta^{\nu}_{\mu+h}$$

меньше $\frac{1}{5}$.

Слѣдовательно модули всѣхъ чиселъ

$$\alpha^{\nu}_{\mu+1}, \alpha^{\nu}_{\mu+2} \dots \alpha^{\nu}_{\mu+h}$$
$$\beta^{\nu}_{\mu+1}, \beta^{\nu}_{\mu+2} \dots \beta^{\nu}_{\mu+h}$$

меньше $\frac{6}{5}$ и поэтому меньше R.

Такимъ образомъ, мы видимъ, что если модуль одного изъ чиселъ α^{ν}_{μ}, β^{ν}_{μ} будетъ больше $\mathbf{R}$, то въ слѣдующихъ h системахъ

$$[\alpha^{\nu}_{\mu+1}, \beta^{\nu}_{\mu+1}], [\alpha^{\nu}_{\mu+2}, \beta^{\nu}_{\mu+2}] \dots [\alpha^{\nu}_{\mu+h}, \beta^{\nu}_{\mu+h}]$$

модуль каждаго изъ чиселъ

$$\alpha^{\nu}_{\mu+1}, \alpha^{\nu}_{\mu+2} \dots \alpha^{\nu}_{\mu+h}$$
$$\beta^{\nu}_{\mu+1}, \beta^{\nu}_{\mu+2} \dots \beta^{\nu}_{\mu+h}$$

будетъ меньше $\mathbf{R}$.

Отсюда слѣдуетъ, что если мы возьмемъ N послѣдовательныхъ системъ

$$[\alpha^{\nu}, \beta^{\nu}], [\alpha^{\nu}_{1}, \beta^{\nu}_{1}] \dots [\alpha^{\nu}{}_{N-1}, \beta^{\nu}{}_{N-1}],$$

то число тѣхъ изъ нихъ, у которыхъ модуль одного изъ чиселъ больше $\mathbf{R}$, не превосходитъ $\mathbf{M}$, если $\mathbf{M}$ есть ближайшее цѣлое число большее $\frac{N}{h}$. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что число системъ $[\alpha^{\nu}_{\mu}, \beta^{\nu}_{\mu}]$ въ совокупности

$$\begin{array}{llll}
[\alpha, \beta], & [\alpha_1, \beta_1] & \dots & [\alpha_{N-1}, \beta_{N-1}] \\
[\alpha', \beta'], & [\alpha_1', \beta_1'] & \dots & [\alpha'_{N-1}, \beta'_{N-1}] \\
[\alpha'', \beta''], & [\alpha_1'', \beta_1''] & \dots & [\alpha''_{N-1}, \beta''_{N-1}], \\
\dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

у которыхъ модули одного изъ чиселъ α^{ν}_{μ}, β^{ν}_{μ} больше R, не превосходитъ $\mathbf{nM}$.

Если мы исключимъ всѣ эти системы и имъ сопряженныя, то у насъ останутся только тѣ системы

$$[\alpha_a, \beta_a], [\alpha_b, \beta_b], [\alpha_c, \beta_c] \dots$$

и имъ сопряженныя

$$[\alpha_a', \beta_a'], [\alpha_b', \beta_b'], [\alpha_c', \beta_c'] \dots$$
$$[\alpha_a'', \beta_a''], [\alpha_b'', \beta_b''], [\alpha_c'', \beta_c''] \dots$$

у которыхъ модули всѣхъ чиселъ

$$\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c \dots \beta_a, \beta_b, \beta_c \dots$$
$$\alpha_a', \alpha_b', \alpha_c' \dots \beta_a', \beta_b', \beta_c' \dots$$
$$\alpha_a'', \alpha_b'', \alpha_c'' \dots \beta_a'', \beta_b'', \beta_c'' \dots$$

не превосходятъ R.

Число этихъ системъ

$$[\alpha_a, \beta_a],\ [\alpha_b, \beta_b],\ [\alpha_c, \beta_c] \ldots$$

будетъ больше

$$N - nM$$

и, слѣдовательно, съ увеличеніемъ N до ∞ превзойдетъ всякое назначенное число.

Итакъ доказано, что въ ряду системъ параметровъ

$$[\alpha, \beta],\ [\alpha', \beta'],\ [\alpha'', \beta''] \ldots$$

будетъ сколько угодно такихъ, у которыхъ модули каждаго изъ чиселъ α_μ, β_μ, при всѣхъ корняхъ уравненія

(5) $$F(v) = 0,$$

будутъ меньше конечнаго предѣла R.

Въ n^0 81 было доказано, что

$$\alpha_i = \mathfrak{A}_i \sigma_i$$

$$\beta_i = \mathfrak{B}_i \tau_i,$$

гдѣ σ_i и τ_i суть комплексныя единицы, а $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{B}_i$ — раціональныя комплексныя числа, имѣющія, несмотря на безчисленное множество значеній i, только ограниченное число различныхъ значеній. Поэтому модули этихъ чиселъ, при всѣхъ корняхъ уравненія (5), заключаются въ конечныхъ и опредѣленныхъ предѣлахъ.

На основаніи этого свойства чиселъ $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{B}_i$ и того, что было доказано въ этомъ n^0 относительно параметровъ α_i и β_i, мы заключаемъ, что существуетъ неограниченное число системъ параметровъ, для которыхъ модули комплексныхъ единицъ σ_i и τ_i при всѣхъ корняхъ уравненія (5) не будутъ больше извѣстныхъ предѣловъ. Такъ какъ число различныхъ комплексныхъ единицъ, имѣющихъ упомянутое свойство — ограниченное (n^0 26), то легко можно вывести, что при нѣкоторыхъ конечныхъ значеніяхъ i и μ будемъ имѣть

$$\alpha_{i+\mu} = \alpha_i$$

$$\beta_{i+\mu} = \beta_i.$$

Дѣйствительно, пусть количества

$$\mathfrak{A}_i,\ \mathfrak{B}_i,\ \sigma_i,\ \tau_i$$

имѣютъ соотвѣтственно p, q, r, s различныхъ значеній. Тогда $\mathfrak{A}_i\sigma_i$ и $\mathfrak{B}_i\tau_i$ будутъ имѣть соотвѣтственно pr и qs различныхъ значеній. Поэтому число различныхъ системъ (α_i, β_i), у которыхъ модули α_i и β_i меньше R при всѣхъ корняхъ уравненія (5), не можетъ превзойти числа $pqrs$.

Итакъ стоитъ только взять больше $pqrs$ системъ (α_i, β_i), у которыхъ модули α_i и β_i меньше R при всѣхъ корняхъ уравненія (5), чтобы между ними были по крайней мѣрѣ двѣ одинаковыя.

Такъ что періодичность параметровъ α_i и β_i доказана. Мы видѣли выше, что періодъ начнется или съ параметровъ α, β или съ α_1, β_1.

83.

Примѣры: I. Разсмотримъ интегралъ

$$\int\frac{(x-A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\sqrt[3]{3})(x-\sqrt[3]{9})}}.$$

Въ этомъ примѣрѣ

$$\alpha=\sqrt[3]{3},\ \beta=\sqrt[3]{9},\ F(v)=v^3-3,\ v=\alpha.$$

Легко убѣдиться, что

$$\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\alpha(\beta-1)}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha+1}}$$

не выражается раціонально черезъ α. Поэтому обращаемся къ вычисленію l_1, m_1, n_1 .... Можно принять, что

$$l=\alpha^2,\ m=\alpha,\ p=1.$$

По формуламъ (1) n^0 79 имѣемъ

$$l_1=(3+\alpha^2-\alpha)^2=\alpha^2(-1+\alpha+\alpha^2)^2$$

$$m_1=(\alpha+3-\alpha^2)^2=\alpha^2(1-\alpha+\alpha^2)^2$$

$$p_1=(\alpha^2+\alpha-3)^2=\alpha^2(1+\alpha-\alpha^2)^2.$$

Такъ какъ

$$N(-1+\alpha+\alpha^2)=2^2\,.\,5,$$

то комплексное число l содержитъ идеальный множитель числа 5, на который не дѣлится ни одно изъ чиселъ

$$2l,\ 2m,\ 2p;$$

слѣдовательно интегралъ

$$\int\frac{(x-A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\sqrt[3]{3})(x-\sqrt[3]{9})}}$$

не выражается въ логариѳмахъ.

II. Положимъ

$$\alpha=1+4v^2,\ \beta=12v,$$

гдѣ v есть корень неприводимаго уравненія

$$v^3+6v^2-27v+3=0.$$

Приблизительная величина этого корня равна 0,11403. Легко можно убѣдиться, что $\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\alpha(\beta-1)}}$ не выражается раціонально черезъ v. Дѣйствительно, мы находимъ

$$N(\beta-1)=N(12v-1)=37^2$$

$$N(\beta-\alpha)=N(12v-1-4v^2)=-1$$

$$N\alpha=N(1+4v^2)=12025.$$

Поэтому $\sqrt{N\left(\frac{\beta-\alpha}{\alpha(\beta-1}\right)}$ не есть число раціональное и, слѣдовательно, $\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\alpha(\beta-1}}$ не можетъ быть равенъ раціональной функціи v съ раціональными коеффиціентами. Переходимъ поэтому къ вычисленію l_1, m_1, n_1 и т. д. Такъ какъ α и β суть цѣлыя комплексныя числа, то можно положить

$$l_1 = (\alpha + \beta - 1)^2 = (4v^2 + 12v)^2 = 4^2 \,.\, 3v(12v - 1)$$

$$m_1 = (1 + \beta - \alpha)^2 = (12v - 4v^2)^2 = - 4^2 \,.\, 3v(4v^2 - 12v + 1)$$

$$p_1 = (1 + \alpha - \beta)^2 = (2 + 4v^2 - 12v)^2 = - 4(12v - 1)\,(4v^2 - 12v + 1).$$

При этихъ значеніяхъ l_1, m_1, p_1 имѣемъ

$$l_2 = (l_1 m_1 + l_1 p_1 - m_1 p_1)^2 = 4^8.3^3.v^3(12v - 1)^3\,(4v^2 - 12v + 1)^2$$

$$m_2 = (m_1 l_1 + m_1 p_1 - l_1 p_1)^2 = - 4^8.3^3.v^3(12v - 1)^2\,(4v^2 - 12v + 1)^3$$

$$p_2 = (p_1 l_1 + p_1 m_1 - l_1 m_1)^2 = - 4^7.3^2.v^2(12v - 1)^3\,(4v^2 - 12v + 1)^3.$$

Изъ этихъ формулъ слѣдуетъ, что

$$\frac{l_2}{m_2} = \frac{l_1}{m_1}, \quad \frac{l_2}{p_2} = \frac{l_1}{p_1}.$$

Итакъ интегралъ

$$\int \frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}},$$

при назначенныхъ выше параметрахъ α и β, выражается въ логариѳмахъ.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

Объ уравненіяхъ дѣленія эллиптическихъ функцій.

84.

Если n будетъ какое нибудь цѣлое нечетное число, k модуль эллиптическихъ функцій, K и $K'i$ полные эллиптическіе аргументы, то, какъ извѣстно,

$$sn(nu) = snu\,\frac{U_n}{\Omega_n},$$

гдѣ U_n и Ω_n суть цѣлыя функціи $x = sn^2u$ и k^2 съ цѣлыми коеффиціентами. Степень этихъ функцій относительно x равна $\frac{n^2-1}{2}$.

Корни уравненія $U_n = 0$ выражаются формулою

$$x_{2m,2m'} = sn^2\,\frac{2mK + 2m'K'i}{n},$$

въ которой числамъ m и m' надобно давать слѣдующія значенія:

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \text{при } m = 0,\ m' = 1, 2, \ldots \frac{n-1}{2}; \\ \text{при } m = 1, 2, \ldots \frac{n-1}{2},\ m' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \frac{n-1}{2}. \end{array}\right.$$

Такъ что уравненіе $U_n = 0$ можетъ быть замѣнено такимъ

$$(2)\qquad (n) = \Pi(x - x_{2m,2m'}) = 0,$$

гдѣ Π означаетъ произведеніе распространенное, на всѣ вышеупомянутыя значенія m и m', и (n) функцію U_n, раздѣленную на коеффиціентъ при $x^{\frac{n^2-1}{2}}$.

Вычисляя дискриминанту уравненія (2), находимъ для нея значеніе

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n^{\frac{n^2-3}{2}} \cdot 2^{\frac{(n^2-1)(n^2-3)}{6}} \frac{k_1^{\frac{(n^2-1)(n^2-3)}{6}}}{k^{\frac{(n^2-1)(n^2-3)}{3}}},$$

гдѣ k_1 — дополнительный модуль.

Изъ этого выраженія дискриминанты слѣдуетъ, что уравненіе $U_n = 0$, при k^2 не равномъ нулю или единицѣ, не имѣетъ равныхъ корней.

85.

Если n — число сложное, то всѣ корни $x_{2m,\,2m'}$ уравненія $U_n = 0$ можно распредѣлить на нѣсколько классовъ. Пусть $n = dd'$. Мы отнесемъ къ одному классу, соотвѣтствующему дѣлителю d числа n, всѣ тѣ корни $x'_{2m,\,2m'}$, у которыхъ общій наибольшій дѣлитель чиселъ m, m', n равенъ d'. Такимъ образомъ, разсматривая различные дѣлители d, составимъ столько классовъ, сколько дѣлителей n (дѣлитель $d=1$ исключается). Обозначимъ черезъ $\varphi_d(x)$ — произведеніе всѣхъ множителей $x - x_{2m,\,2m'}$, гдѣ $x_{2m,\,2m'}$ относится къ классу, соотвѣтствующему дѣлителю d. Очевидно, что функція (n) можетъ быть при этотъ обозначеніи представлена такъ:

$$(1) \qquad (n) = \Pi\varphi_d(x),$$

гдѣ произведеніе Π распространяется на всѣхъ дѣлителей n за исключеніемъ единицы.

Не трудно показать, что $\varphi_d(x)$ не зависитъ отъ n, а зависитъ только отъ d. Для этого достаточно только разсмотрѣть величины $x_{2m,\,2m'}$ относящіяся къ классу, соотвѣтствующему дѣлителю d. Согласно опредѣленію этого класса можно положить $m = d'\mu$, $m' = d'\mu'$, гдѣ μ и μ' — цѣлыя числа, общій наибольшій дѣлитель которыхъ будетъ взаимно простымъ относительно d. Такъ какъ значенія m и m' заключаются въ совокупности (1) n^0 84, то всѣ значенія μ и μ' будутъ непремѣнно содержаться между такими:

$$\mu = 0, \ \mu' = 1, 2, \ldots . \frac{d-1}{2}$$

$$\mu = 1, 2, \ldots . \frac{d-1}{2}, \ \mu' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \pm \frac{d-1}{2}.$$

Изъ этой совокупности нужно брать, конечно, только такія значенія μ и μ', общій наибольшій дѣлитель которыхъ будетъ число взаимно простое относительно d. Такимъ образомъ мы видимъ, что выборъ чиселъ m и m', при которыхъ $x_{2m,\,2m'}$ будетъ принадлежать къ классу, соотствующему дѣлителю d, зависитъ только отъ d, а не отъ n.

Изъ уравненія (1) можно вывести функцію $\varphi_n(x)$ слѣдующимъ образомъ:

Согласимся принять

$$\varphi_1(x) = 1 \ \text{и} \ (1) = 1$$

и положимъ

$$\log\varphi_d(x) = \Phi(d).$$

По уравненію (1) находимъ

$$\log(n) = \Sigma\Phi(d),$$

гдѣ Σ распространяется на всѣхъ дѣлителей n. Положимъ

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s},$$

гдѣ $p_1, p_2 \dots p_s$ различныя простыя числа, и пусть

$$n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right) = \Sigma\delta_1 - \Sigma\delta_2.$$

Вторая часть послѣдняго равенства получается изъ первой, если раскрыть скобки; при этомъ сумма положительныхъ членовъ обозначена черезъ $\Sigma\delta_1$, а сумма отрицательныхъ черезъ $-\Sigma\delta_2$.

Поступая совершенно также какъ въ n^0 13, получимъ

$$\Phi(n) = \Sigma\log(\delta_1) - \Sigma\log(\delta_2)$$

и, слѣдовательно,

$$\varphi_n(x) = \frac{\Pi(\delta_1)}{\Pi(\delta_2)};$$

произведеніе Π въ числителѣ распространяется на всѣ числа δ_1, а въ знаменателѣ на всѣ числа δ_2. Такъ какъ коеффиціенты функціи (δ_1) и (δ_2) суть раціональныя функціи k^2, то таковы же будутъ и коеффиціенты $\varphi_n(x)$.

Итакъ всѣ количества *$x_{2m, 2m'} = sn^2 \frac{2mK + 2m'K'i}{n}$, у которыхъ числа m, m' и n не имѣютъ общаго дѣлителя, суть корни одного уравненія $\varphi_n(x) = 0$ степени*

$$\Sigma\tfrac{1}{2}|\delta_1^2 - 1| - \Sigma\tfrac{1}{2}|\delta_2^2 - 1| = \tfrac{1}{2}n^2\left(1 - \frac{1}{p^2_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p^2_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p^2_s}\right);$$

коеффиціенты этого уравненія будутъ вида

$$\frac{A_0 + A_1 k^2 + A_2 k^4 + \dots + A_g k^{2g}}{B_0 + B_1 k^2 + B_2 k^4 + \dots + B_h k^{2h}},$$

гдѣ $A_0, A_1 \dots, B_0, B_1 \dots$ суть числа цѣлыя.

86.

Изъ уравненія $\varphi_n(x) = 0$ весьма легко выводится уравненіе также степени

$$\frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{p^2_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p^2_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p^2_s}\right),$$

которому удовлетворяютъ всѣ величины

$$sn^2 \frac{(2\mu + 1)K + 2mK'i}{n},$$

у которыхъ числа $2\mu + 1$, m' и n не имѣютъ общаго дѣлителя.

Дѣйствительно, положимъ что

$$2\mu + 1 = 2m + n,$$

гдѣ m число цѣлое, потому что n нечетное.

Замѣчая, что

$$sn^2 \frac{(2\mu + 1)K + 2m'K'i}{n} = sn^2\left(\frac{2mK + 2m'K'i}{n} + K\right) = \frac{1 - sn^2 \frac{2mK + 2m'K'i}{n}}{1 - k^2 sn^2 \frac{2mK + 2m'K'i}{n}},$$

мы видимъ, что изъ уравненія $\varphi_n(x) = 0$, при помощи подстановки

$$z = \frac{1 - x}{1 - k^2 x},$$

получается уравненіе $\psi_n(z) = 0$, которому удовлетворяетъ

$$sn^2 \frac{(2\mu + 1)K + 2m'K'i}{n}.$$

Совершенно также убѣдимся, что изъ уравненія $\varphi_n(x) = 0$, при помощи подстановокъ

$$z = \frac{1}{k^2 x}, \quad z = \frac{1 - k^2 x}{k^2(1 - x)},$$

получаются соотвѣтственно уравненія для количествъ

$$sn^2 \frac{2mK + (2\mu' + 1)K'i}{n}$$

и

$$sn^2 \frac{(2\mu + 1)K + (2\mu' + 1)K'i}{n},$$

у которыхъ въ первомъ числа m, $2\mu' + 1$ и n, а во второмъ числа $2\mu + 1$, $2\mu' + 1$ и n не имѣютъ общаго дѣлителя.

87.

Пусть теперь n будетъ четное число. Въ этомъ случаѣ будетъ имѣть мѣсто формула

$$cn(nu) = \frac{V_n}{\Omega_n},$$

гдѣ V_n и Ω_n цѣлыя функціи $x = sn^2 u$ и k^2 съ цѣлыми коеффиціентами. Степень этихъ функцій относительно x равна $\frac{n^2}{2}$. Корни уравненія $V_n = 0$, какъ извѣстно, могутъ быть представлены подъ видомъ

$$x_{2\mu+1,\, 2m'} = sn^2 \frac{(2\mu + 1)K + 2m'K'i}{n},$$

гдѣ числамъ $2\mu + 1$ и $2m'$ приписываются слѣдующія значенія:

$$2\mu + 1 : 1,\ 3,\ 5,\ \ldots .\ n - 1$$

$$2m' : 0,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \ldots .\ \pm (n - 2),\ n.$$

Такъ что уравненіе $V_n = 0$ можетъ быть замѣнено такимъ:

$$(n) = \Pi(x - x_{2\mu+1,\, 2m'}) = 0,$$

гдѣ Π означаетъ произведеніе, распространенное на всѣ вышеупомянутыя значенія $2\mu + 1$ и $2m'$. Всѣ корни уравненія $V_n = 0$, между которыми, какъ легко доказать, нѣтъ равныхъ, могутъ быть распредѣлены на нѣсколько классовъ:

Положимъ, что

$$n = 2^{\gamma}h,$$

гдѣ h нечетное число, и пусть h_1 будетъ однимъ изъ дѣлителей h; такъ что

$$n = 2^{\gamma}h_1h_2 = dh_2,$$

гдѣ $d = 2^{\gamma}h_1$. Мы отнесемъ къ одному классу, соотвѣтствующему дѣлителю d, всѣ корни $x_{2\mu+1,2m'}$, для которыхъ h_2 будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ чиселъ $2\mu + 1$, m' и n. Число всѣхъ классовъ будетъ равно числу нечетныхъ дѣлителей n. Обозначимъ черезъ $\psi_d(x)$ произведеніе всѣхъ множителей $x - x_{2\mu+1,\, 2m'}$, у которыхъ $x_{2\mu+1,\, 2m'}$ относится къ классу, соотвѣтствующему дѣлителю d. Очевидно, что функція (n) при этомъ обозначеніи можетъ быть представлена такъ:

$$(n) = \Pi\psi_d(x), \tag{1}$$

гдѣ произведеніе Π распространяется на всѣхъ дѣлителей n вида $2^{\gamma}h_1$. Изъ уравненія (1), полагая

$$n = 2^{\gamma}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2} \ldots . p_s^{\alpha_s},$$

гдѣ p_1, p_2 . . . . p_s — различныя простыя нечетныя числа, и

$$n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_s}\right) = \Sigma\delta_1 - \Sigma\delta_2,$$

найдемъ, подобно тому какъ въ предыдущемъ n^0,

$$\psi_n(x) = \frac{\Pi(\delta_1)}{\Pi(\delta_2)}.$$

Такъ какъ коеффиціенты функцій (δ_1) и (δ_2) суть раціональныя функціи отъ k^2 вида

$$\frac{A_0 + A_1k^2 + A_2k^4 + \ldots . + A_gk^{2g}}{B_0 + B_1k^2 + B_2k^4 + \ldots . + B_hk^{2h}}, \tag{2}$$

гдѣ A_0, A_1 . . . . B_0, B_1 . . . . числа цѣлыя, то такого-же вида будутъ и коеффиціенты функціи $\psi_n x$. Совершенно подобнымъ же образомъ докажемъ, что величины

$$sn^2\, \frac{2mK + (2\mu' + 1)\, K'i}{n} \text{ и } sn^2\, \frac{(2\mu + 1)\, K + (2\mu' + 1)\, K'i}{n},$$

изъ которыхъ въ первой числа m, $2\mu' + 1$ и n, а во второй числа $2\mu + 1$, $2\mu' + 1$ и n не имѣютъ общаго дѣлителя, удовлетворяютъ соотвѣтственно нѣкоторымъ уравненіямъ степени

$$\tfrac{1}{2}n^2\left(1 - \frac{1}{p^2_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p^2_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p^2_s}\right).$$

Итакъ мы видимъ, что величины

$$sn^2\,\frac{mK + m'K'i}{n},$$

у которыхъ числа m, m' и n не имѣютъ общаго дѣлителя, удовлетворяютъ нѣкоторымъ уравненіямъ степени

$$\tfrac{1}{2}n^2\Big(1 - \frac{1}{p^2{}_1}\Big)\Big(1 - \frac{1}{p^2{}_2}\Big)\,\cdots\cdots\Big(1 - \frac{1}{p^2{}_s}\Big).$$

Въ слѣдующемъ n^0 мы докажемъ неприводимость этихъ уравненій т. е. докажемъ, что ни одна изъ такихъ величинъ

$$sn^2\,\frac{mK + m'K'i}{n}$$

не удовлетворяетъ уравненію степени ниже

$$\tfrac{1}{2}n^2\Big(1 - \frac{1}{p^2{}_1}\Big)\Big(1 - \frac{1}{p^2{}_2}\Big)\,\cdots\cdots\Big(1 - \frac{1}{p^2{}_s}\Big),$$

коеффиціенты котораго были бы вида (2).

88.

Извѣстно, что, полагая

$$\frac{K'i}{K} = \omega,\ q = e^{\pi\omega i},$$

мы будемъ имѣть формулы

$$\varphi(\omega) = \sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\,.\,\sqrt[8]{q}\,\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots\ldots},$$

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \Big[(1-q^2)\,(1-q^4)\,(1-q^6)\,\ldots\ldots\Big]\Big[(1+q)\,(1+q^3)\,(1+q^5)\,\ldots\ldots\Big]^2.$$

Изъ этихъ формулъ видно, что величины k, K и $K'i$ можно разсматривать какъ функціи величины ω, которая можетъ имѣть всѣ значенія вида $r + si$, гдѣ $s > 0$. Это послѣднее условіе необходимо для того, чтобы модуль q былъ меньше единицы.

Въ теоріи преобразованія эллиптическихъ функцій доказывается, что если ω замѣнить величиною

$$\frac{c + d\omega}{a + b\omega},$$

гдѣ a, b, c, d цѣлыя числа, удовлетворяющія уравненію

(1) $$ad - bc = 1$$

и сравненіямъ

(2) $$a \equiv 1,\ b \equiv 0,\ c \equiv 0,\ d \equiv 1\ (\text{мод. } 2),$$

то при этомъ k^2 не измѣнится т. е.

$$\varphi^8\Big(\frac{c + d\omega}{a + b\omega}\Big) = \varphi^8(\omega) = k^2,$$

а K и $K'i$ измѣнятся соотвѣтственно на

$$(-1)^{\frac{d-1}{2}}(aK + bK'i)$$

$$(-1)^{\frac{d-1}{2}}(cK + dK'i).$$

На основаніи этого свойства величинъ k, K и $K'i$, можно доказать неприводимость уравненій степени

$$\frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{p^2{}_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p^2{}_2}\right) \cdots \cdot \left(1 - \frac{1}{p^2{}_s}\right),$$

которымъ удовлетворяютъ величины

$$sn^2\,\frac{mK + m'K'i}{n}.$$

Допустимъ напротивъ, что уравненіе $\varphi_n(x) = 0$ не есть неприводимое. Въ такомъ случаѣ можно найти уравненіе степени низшей, которому удовлетворяетъ какой угодно корень уравненія $\varphi_n x = 0$, и коеффиціенты котораго будутъ вида (2) n^0 87 Мы разсмотримъ то уравненіе, которому удовлетворяетъ $sn^2\,\frac{2K}{n}$.

По извѣстнымъ формуламъ эллиптическихъ функцій можно выразить $sn^2\,\frac{2K}{n}$ какъ функцію отъ $q = e^{\pi\omega i}$ и слѣдовательно отъ ω. Положимъ $sn^2\,\frac{2K}{n} = f(\omega)$ и пусть

$$(3) \qquad F(k^2, x) = 0,$$

будетъ уравненіе степени ниже

$$\frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{p^2{}_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p^2{}_2}\right) \cdots \cdot \left(1 - \frac{1}{p^2{}_s}\right)$$

которому удовлетворяетъ $sn^2\,\frac{2K}{n}$; F означаетъ здѣсь цѣлую функцію съ цѣлыми коеффиціентами.

Внося вмѣсто k^2 и x равныя имъ величины $\varphi^8(\omega)$ и $f(\omega)$, получимъ равенство

$$F(\varphi^8(\omega),\ f(\omega)) = 0,$$

имѣющее мѣсто при всякихъ $\omega = r + si$, для которыхъ $s > 0$. Замѣщая здѣсь ω на $\frac{c + d\omega}{a + b\omega}$, гдѣ a, b, c, d — цѣлыя числа, удовлетворяющія условіямъ (1) и (2), мы по замѣченному выше получимъ

$$\varphi^8\left(\frac{c + d\omega}{a + b\omega}\right) = \varphi^8(\omega),\quad f\left(\frac{c + d\omega}{a + b\omega}\right) = sn^2\,\frac{2aK + 2bK'i}{n}.$$

Итакъ уравненію (3) удовлетворяетъ

$$sn^2\,\frac{2aK + 2bK'i}{n}.$$

Вмѣсто a и b можно взять какія угодно цѣлыя числа, неимѣющія общаго дѣлителя и удовлетворяющія сравненіямъ

$$a \equiv 1,\ b \equiv 0 \text{ (мод. 2)}.$$

Числа a и b могутъ быть подобраны, какъ мы докажемъ, такимъ образомъ, что

$$sn^2 \frac{2aK + 2bK'i}{n}$$

будетъ равенъ

$$sn^2 \frac{2mK + 2m'K'i}{n},$$

гдѣ m и m' какія угодно цѣлыя числа, общій наибольшій дѣлитель которыхъ есть число простое относительно n.

Дѣйствительно, полагая

$$a = 2a' + 1, \quad b = 2b',$$

мы опредѣлимъ a' и b' изъ сравненій

$$2a' \equiv m - 1, \quad 2b' \equiv m' \ (\text{мод. } n),$$

которыя всегда имѣютъ рѣшенія, потому что n число нечетное. Мы беремъ одно какое нибудь рѣшеніе этихъ сравненій.

Можетъ быть, что числа a и b, опредѣленныя такимъ образомъ, не будутъ взаимно простыми, но ихъ общій наибольшій дѣлитель долженъ быть числомъ простымъ относительно n, потому что иначе и числа m, m' и n имѣли бы общаго дѣлителя, чего мы не предполагаемъ. Если найденныя числа a и b дѣйствительно не будутъ взаимно простыми, то мы возьмемъ вмѣсто нихъ соотвѣтственно числа

$$a + 2n\frac{b}{d} \text{ и } b,$$

гдѣ d есть дѣлитель b, состоящій только изъ простыхъ множителей общихъ a и b и притомъ такой, что $\frac{b}{d}$ не содержитъ уже ни одного изъ этихъ множителей; въ такомъ случаѣ числа $a + 2n\frac{b}{d}$ и b будутъ уже взаимно простыми.

Мы имѣемъ

$$sn^2 \frac{2\left(a + 2n\frac{b}{d}\right)K + 2bK'i}{n} = sn^2 \frac{2aK + 2bK'i}{n} = sn^2 \frac{2mK + 2m'K'i}{n}.$$

Итакъ уравненію (3) удовлетворяютъ всѣ величины

$$sn^2 \frac{2mK + 2m'K'i}{n},$$

въ которыхъ числа m, m' и n не имѣетъ общаго дѣлителя т. е. другими словами всѣ корни уравненія $\varphi_n(x) = 0$, и въ этомъ заключается противорѣчіе, потому что степень уравненія (3) предполагается меньше степени уравненія $\varphi_n(x) = 0$. Такъ что уравненіе $\varphi_n(x) = 0$ неприводимое.

89.

Теперь разсмотримъ уравненіе (n^0 87)

$$\psi_n(x) = 0$$

гдѣ n число четное. Корни этого уравненія представляются подъ видомъ

$$(1) \qquad sn^2 \frac{(2\mu + 1) K + 2m'K'i}{n},$$

гдѣ числа $2\mu + 1$, m' и n не имѣютъ общаго дѣлителя. Положимъ что уравненіе $\psi_n(x) = 0$ не есть неприводимое. Въ такомъ случаѣ каждая изъ величинъ (1) удовлетворяетъ уравненію степени ниже

$$\frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{p^2{}_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p^2{}_2}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \left(1 - \frac{1}{p^2{}_s}\right),$$

коеффиціенты котораго имѣютъ видъ (2) (n^0 87). Мы остановимся на величинѣ $sn^2 \frac{K}{n}$. Положимъ, что она удовлетворяетъ уравненію

$$(2) \qquad \Phi\left(k^2,\ sn^2 \frac{K}{n}\right) = 0.$$

Разсуждая также какъ въ предыдущемъ n^0, докажемъ, что тому же уравненію удовлетворяетъ величина

$$sn^2 \frac{aK + bK'i}{n},$$

гдѣ a и b взаимно простыя числа, удовлетворяющія сравненіямъ

$$a \equiv 1, \ b \equiv 0 \ (\text{мод. } 2).$$

Числа a и b могутъ быть подобраны, какъ мы увидимъ, такъ, что

$$sn^2 \frac{aK + bK'i}{n}$$

будетъ равенъ
$$sn^2 \frac{(2\mu + 1) K + 2m'K'i}{n},$$

гдѣ $2\mu + 1$ и m' какія нибудь цѣлыя числа, общій наибольшій дѣлитель которыхъ есть число простое относительно n. Съ этою цѣлью положимъ

$$a \equiv 2a' + 1, \ b \equiv 2b'$$

и опредѣлимъ a' и b' изъ сравненій

$$a' \equiv \mu, \ b' \equiv m' \ (\text{мод. } n).$$

Если $2a' + 1$ и $2b'$ будутъ имѣть общихъ дѣлителей, то всѣ такіе дѣлители будутъ числа простыя относительно n, потому что иначе и числа $2\mu + 1$, m' и n имѣли бы общаго дѣлителя, чего мы не предполагаемъ. При существованіи общаго дѣлителя чиселъ $2a' + 1$ и $2b'$, мы возьмемъ вмѣсто числа a такое:

$$a + 2n \frac{b}{d},$$

гдѣ d есть дѣлитель b, составленный изъ общихъ множителей a и b и такой, что $\frac{b}{d}$ не содержитъ уже ни одного множителя общаго a и b. При этомъ, очевидно, числа $a + 2n\frac{b}{d}$ и b будутъ уже взаимно простыми.

Такъ какъ

$$sn^2 \frac{\left(a + 2n\frac{b}{d}\right)K + bK'i}{n} = sn^2 \frac{(2\mu + 1)K + 2m'K'i}{n},$$

то мы убѣждаемся, что уравненію (2) удовлетворяютъ всѣ корни уравненія

$$\psi_n(x) = 0$$

и, слѣдовательно, степень уравненія (2) не можетъ быть ниже

$$\frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{p^2{}_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p^2{}_2}\right) \cdots \cdot \left(1 - \frac{1}{p^2{}_s}\right),$$

что противорѣчитъ предположенію.

Совершенно подобнымъ же образомъ докажемъ неприводимость уравненій степени

$$\frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{p^2{}_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p^2{}_2}\right) \cdots \cdot \left(1 - \frac{1}{p^2{}_s}\right),$$

которымъ удовлетворяютъ

$$sn^2 \frac{2mK + (2\mu' + 1)K'i}{n} \quad \text{и} \quad sn^2 \frac{(2\mu + 1)K + (2\mu' + 1)K'i}{n}.$$

УКАЗАНІЯ И ПРИМѢЧАНІЯ.

1) Эта статья изложена довольно подробно въ курсѣ высшей алгебры Серре (II томъ, III глава, 3-е изданіе) подъ заглавіемъ: «Propriétés des fonctions entières d'une variable, relativement à un module premier». Въ 1865 году Серре, представляя въ Парижскую Академію свой мемуаръ объ этомъ предметѣ, замѣтилъ, что первыя изысканія объ немъ заключаются въ работахъ Галоа, который впрочемъ разсматривалъ вопросы, относящіеся къ этой теоріи съ другой точки зрѣнія. Но Гауссъ еще раньше Галоа, подробно разработалъ эту теорію. Эти изслѣдованія Гаусса должны были составить 8-ю главу, «Disquisitiones arithmeticae». См. Gauss Werke, Zweiter Band «Disquisitiones generales de congruentiis. На основаніи этого мы приписываемъ эту теорію, по крайней мѣрѣ въ главныхъ чертахъ, Гауссу.

2) Теорія сравненій Академика Чебышева стр. 21.

3) Серре называетъ такія функціи неприводимыми по модулю p (fonction irréductible suivant le module premier). Мы предпочли названіе простая функція по модулю p, данное Гауссомъ.

4) Disquisitiones generales de congruentiis Гаусса n^0 353. Serret. Cours d'algèbre supérieure II, page 131.

5) Serret, ibidem page 134.

6) Эта лемма предложена Дирихле. Vorlesungen über Zahlentheorie § 138.

7) Число p принадлежитъ къ показателю h по модулю n, если h есть наименьшее число, удовлетворяющее сравненію $p^h \equiv 1$ (мод. n). Этотъ терминъ встрѣчается у Гаусса и у Дирихле.

7) Понятіе о періодахъ встрѣчается у Гаусса, Gauss Werke, Band II. Solutio congruentiae $X^m - 1 \equiv 0$.

9) Crelle. Journal für die Mathematik, Band 35. Journal de Mathématiques de M. Liouville. Tome XVI, 1851.

10) Kummer. Journal de Mathématiques de M. Liouville. Tome XVI 1851.

11) Этотъ терминъ былъ введенъ Гауссомъ для чиселъ вида $a + bi$. Дирихле распространилъ его и на общія комплексныя числа.

12) Это свойство было замѣчено еще **Лагранжемъ**. **Lagrange** Oeuvres Tome II, p. 527.

13) Ibidem p. 530.

14) См. напр. **Balzer**. Theorie und Anwendung der Determinanten 1857 p. 43.

15) **Kronecker**. De unitatibus conplexis. Dissertatio p. 21.

16) На эти особенныя рѣшенія указываетъ **Дирихле**. Monatsberichte der Berliner Academie за 1846.

17) Весьма остроумная мысль разсматривать minima положительныхъ формъ съ перемѣннымъ параметромъ принадлежитъ **Эгмпту**. Lettres à **Jacobi**. Mathematische Werke **Jacobi**. Tome II.

18) Эта теорема принадлежитъ **Эгмиту**. У него коеффиціентъ μ равенъ $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}$. Эта теорема есть одна изъ самыхъ замѣчательныхъ въ теоріи чиселъ. Числу μ можно дать и меньшія значенія см. «Sur les formes quadratiques» par A. **Korkine** и G. **Zolotareff**. Mathematische Annalen. VI Band.

19) Эта теорема принадлежитъ **Дирихле**. Monatsberichte der Berliner Academie 1846. Другое доказательство этой теоремы независимое отъ теоріи квадратичныхъ формъ можно найти у **Дирихле** «Vorlesungen über Zahlentheorie» herausgegeben von **Dedekind**, 3-е изданіе § 166.

20) Эта теорема принадлежитъ также **Дирихле**. Въ той же въ высшей степени замѣчательной замѣткѣ (Monatsberichte 1846). **Дирихле** сообщилъ и главные пункты доказательства этой теоремы. **Якоби** въ примѣчаніи къ письму **Эрмита** говоритъ: Le théorème complet savoir: *Qu'il y a effectivement, dans tous les cas, $m' - 1$ (*) unités complexes independantes par les produits des puissances desquelles on puisse représenter tous les autres, est un des plus importants mais aussi un de plus épineux de la science des nombres.*

21. Относительно теоремъ, доказанныхъ въ этомъ n^0 и слѣдующихъ, см. **Kummer** Journal de M. **Lioville**. Tome XVI, 1851 **Кронеккеръ**: De unitatibus complexis.

23) Относительно теоріи комплексныхъ чиселъ вида $a + bi$ см. **Gauss** Werke, Zweiter Band. Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio Secunda.

Lejeune **Dirichlet**. Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indeterminées complexes. Journal **Crelle**. Band 24.

24) Относительно различныхъ приложеній этихъ чиселъ см. **Eisenstein**. Journal **Crelle**, Band 28, гдѣ доказанъ законъ взаимности для биквадратичныхъ вычетовъ. Его же Applications de l'Algèbre à l'Arithmétique transcendante. Mathematische Abhandlungen 1847. **Bachman**. Die Lehre von der Kreistheilung 1872.

25) **Jacobi**. Sur les nombres complexes que l'on doit considérer dans la théorie des résidus de cinquème, huitième et douxième puissance. Journal de M. **Liouville**. Tome VIII, I Serie.

(*) По нашимъ обозначеніямъ $h - 1$.

26) Изслѣдованія Ляме и Коши, относящіяся къ этому предмету, помѣщены въ Comptes rendus des seances de l'Académie des sciences за 1847.

27) Главнѣйшія мемуары Куммера по этому предмету помѣщены: въ журналѣ Крелля томы 30 и 35, въ запискахъ Берлинской Академіи за 1856 и 1859 и въ журналѣ Ліувилля томъ 16, 1-й серіи.

28) Относительно этого изслѣдованія Кроннеккера см. Serret. Cours d'algébre supérieure. 3-me édition.

29) Journal Crelle. Band XXVIII.

30) Kummer. Journal de Mathématiques. Tome XVI 1-й серіи.

31) Abel. Oeuvres complètes p. 31 et suiv.

32) Bulletin de l'Académie de St.-Pétersbourg. Tome III 1860.

33) Liouville. Journal de Mathématiques, 1864. Еще раньше въ томъ же журналѣ (1857 г.) Чебышевъ доказалъ, что интегрированіе дифференціаловъ, содержащихъ раціонально x и корень квадратный изъ полинома 3-й или 4-й степени, въ томъ случаѣ когда оно возможно въ логариѳмахъ, можетъ быть приведено къ интегрированію дифференціаловъ такого вида: $\frac{(x + A)\, dx}{\sqrt{Rx}}$

34) Mathematische Annalen herausgegeben von A. Clebch и C. Neumann. V Band

35) Monatsberichte der Academie der Wissenschaften zu Berlin 1857.

36) Journal Crelle. Band 64.

37) Jacobi. Mathematische Werke. томъ III, стр 83.

38) Очеркъ теоріи эллиптическихъ функцій при шестомъ изданіи курса дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія Лакроа.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стран.	Строка.	Напечатано.	Должно быть.
3	12 сверху	функціи	функціи,
7	4 „	$=$	$\equiv$
8	29 „	$\equiv$	$=$
20	20 „	О періодахъ [8],	О періодахъ [8].
50	13 „	безконечно	безконечнаго
57	18 „	$c_0c_1 \dots c_{k-1}c_k \dots c_{h-1}$	$c_0c_1 \dots c_{k-1}c^2_k \dots c^2_{h-1}$
59	2 „	$\varepsilon'_1(x)\,\varepsilon^2_2(x) \dots \varepsilon_{h-1}^{\delta_{h-1}}(x)\,e^{\theta_1}$	$\varepsilon_1^{\delta_1}(x)\,\varepsilon_2^{\delta_2}(x) \dots \varepsilon_{h-1}^{\delta_{h-1}}(x)\,e^{\theta_1}$
69	5 „	отношеніе	Отношеніе
77	2 снизу	тенрь	теперь
89	30 сверху	не дѣлящаяся	недѣлящаяся
96	29 „	не дѣлящался	недѣлящался
107	3 „	Ліувилля	Ліувилля [35]
107	4 „	Tchebycheff	Tchebycheff [34]
113	16 „	$k^2 = \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\alpha -}{\beta - 1}$	$k^2 = \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\alpha - 1}{\beta - 1}$
122	1 „	формулъ	формулъ (2)
128	13 „	опредѣляется	опредѣляемая
129	2 „	больше	большее
143	20 „	входящихъ	входящій.